

## 数学系 入学試験問題

### 数学 I

- ⊗ 1 から 7 までの全問を解答せよ .
- ⊗ 解答時間は 4 時間 である .
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する .

#### [ 注意 ]

1. 指示のあるまで開かぬこと .
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに , 受験番号・氏名を記入せよ .
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い , 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ .
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは , つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること .
5. 提出の際は , 解答用紙を問題番号順に重ね , 計算用紙をその下に揃え , 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること .
6. この問題用紙は持ち帰ってよい .

#### [ 記号 ]

以下の問題で  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す .

- 1 複素数を成分とする 2 次正方行列  $A$  と  $B$  は, 複素 2 次正則行列  $P$  が存在して  $B = P^{-1}AP$  であるとき相似であるという. 次の 4 つの行列が互いに相似かどうか理由をつけて答えよ.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- 2 开区間  $(0, 1)$  上の微分可能な実数値関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  が有界ならば, 开区間  $(0, 1)$  内のコーシー列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して  $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$  もまたコーシー列となることを示せ.  $f$  が単に微分可能であればどうか?
- 3 体  $K$  の元を成分とする  $n$  次正方行列  $A$  の余因子行列を  $\widetilde{A}$  であらわす. このとき  $n$  次正方行列  $A, B$  に対して  $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$  を示せ.

- 4  $x > 0$  に対して広義積分

$$G(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

を求めよ.

- 5  $\mathbb{C}$  上の有理型関数のなす体は  $\mathbb{C}$  上の一変数有理函数体上超越的であることを示せ.

- 6  $A$  を原点  $o = (0, 0)$  を含む  $\mathbb{R}^2$  の凸集合とする.

(1)  $A$  は弧状連結であることを示せ.

(2) 基本群  $\pi_1(A, o)$  を求めよ.

- 7  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$  とおく.  $E$  を含む開集合上の正則関数  $f(z)$  であって

$$|z| = 1 \text{ のとき } \operatorname{Re} f(z) > 0$$

$$|z| = 2 \text{ のとき } \operatorname{Re} f(z) < 0$$

となるものは存在しないことを示せ.