

数学系 入学試験問題

数学 I

- ⊗ 1 から 7 までの全問を解答せよ .
- ⊗ 解答時間は 4 時間 である .
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する .

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと .
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに , 受験番号・氏名を記入せよ .
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い , 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ .
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは , つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること .
5. 提出の際は , 解答用紙を問題番号順に重ね , 計算用紙をその下に揃え , 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること .
6. この問題用紙は持ち帰ってよい .

[記号]

以下の問題で \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す .

- 1 複素数を成分とする 2 次正方行列 A と B は, 複素 2 次正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ であるとき相似であるという. 次の 4 つの行列が互いに相似かどうか理由をつけて答えよ.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- 2 开区間 $(0, 1)$ 上の微分可能な実数値関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が有界ならば, 开区間 $(0, 1)$ 内のコーシー列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ もまたコーシー列となることを示せ. f が単に微分可能であればどうか?
- 3 体 K の元を成分とする n 次正方行列 A の余因子行列を \widetilde{A} であらわす. このとき n 次正方行列 A, B に対して $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ を示せ.

- 4 $x > 0$ に対して広義積分

$$G(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

を求めよ.

- 5 \mathbb{C} 上の有理型関数のなす体は \mathbb{C} 上の一変数有理函数体上超越的であることを示せ.

- 6 A を原点 $o = (0, 0)$ を含む \mathbb{R}^2 の凸集合とする.

(1) A は弧状連結であることを示せ.

(2) 基本群 $\pi_1(A, o)$ を求めよ.

- 7 $E = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ とおく. E を含む開集合上の正則関数 $f(z)$ であって

$$|z| = 1 \text{ のとき } \operatorname{Re} f(z) > 0$$

$$|z| = 2 \text{ のとき } \operatorname{Re} f(z) < 0$$

となるものは存在しないことを示せ.