平成 17 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

# 数学系 入学試験問題

# 数学 II

⊗　問題は７題あり，次の３つの分野群に分かれる．分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題，分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題，分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題である．

⊗　この７問題中, ３問題 を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ．

⊗　解答時間は ４時間 である．

⊗　参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する．

## ［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと．
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ．
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，選択表を上におき，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

## ［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\mathbb{Z}$ 上の $n$ 変数多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の極大イデアルは $n+1$ 個の元で生成されることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $F$ は標数 0 の体で，1 の原始 3 乗根を含むとする．$K/F$ はガロア拡大で，そのガロア群 $\mathrm{Gal}(K/F)$ は $\sigma$ を生成元とする 3 次巡回群であるとする．$a$ を $K$ の元とし，$L = K(\sqrt[3]{a})$ とする．$[L:K] = 3$ と仮定する．

このとき次の (1)，(2) を証明せよ．

(1) $L$ が $F$ のガロア拡大体であるための必要十分条件は

$$\sigma(a) = ab^3$$

をみたす $K$ の元 $b$ が存在することである．

(2) (1) の条件の下で，$L$ が $F$ の巡回拡大体であるための必要十分条件は

$$b\sigma(b)\sigma^2(b) \neq 1$$

である．

（注. ガロア拡大体は，そのガロア群が巡回群であるとき，巡回拡大体という.）

$\boxed{\mathbf{3}}$ $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ を $GL_2(\mathbb{Z})$ の元とし，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を $(ax+by, cx+dy) \in \mathbb{R}^2$ に写す写像から自然に引き起こされる $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の微分同相写像を $f_A$ とおく．$T^2 = S^1 \times S^1$ から第 $j$ 成分への射影 $p_j : T^2 \to S^1$ $(j = 1, 2)$ に対し，$H^1(S^1; \mathbb{Z})$ の生成元 $\alpha$ を 1 つ定めて $\alpha_j = p_j^*(\alpha)$ とおく．

1. $f_A^*(\alpha_j)$ $(j = 1, 2)$ を求めよ．
2. $M_A$ を

$$M_A = T^2 \times [0,1]/\sim, \quad (u, 0) \sim (f_A(u), 1) \ (u \in T^2)$$

によって定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，$M_A$ の整係数コホモロジー群を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $M(n,k)$ を実 $(n,k)$ 行列全体の集合，$S(k)$ を $k$ 次実対称行列全体の集合とし $(n \geq k)$，$f : M(n,k) \to S(k)$ を

$$f(X) = {}^t XX$$

と定義する．

1. $S \in S(k)$ が正定値対称行列ならば $f^{-1}(S)$ は空でないコンパクト $C^\infty$ 多様体になることを示せ．また $\dim f^{-1}(S)$ を求めよ．
2. $S_1, S_2 \in S(k)$ がともに正定値ならば $f^{-1}(S_1)$ と $f^{-1}(S_2)$ は微分同相であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $0 < \alpha < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ に対し関数 $h_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$h_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{n}{k+1}\right)^\alpha, & x \in I^+_{n,k}, \quad (0 \leq k \leq n-1), \\ -\left(\frac{n}{k+1}\right)^\alpha, & x \in I^-_{n,k}, \quad (0 \leq k \leq n-1), \end{cases}$$

ただし $I^+_{n,k} = \left[\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right)$, $I^-_{n,k} = \left[\frac{2k+1}{2n}, \frac{2k+2}{2n}\right)$ である．

このとき以下を示せ．

(1) $0 < \beta < 1$ ならば，定数 $C = C(\beta) \in (0, \infty)$ が存在し，全ての $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\beta} \leq C n^{1-\beta}$$

となる．

(2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が連続ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) h_n(x) dx = 0 \qquad (*)$$

が成立する．

(3) $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$ とする．$f$ が $[0,1]$ 上の実数値 $p$ 乗可積分関数ならば $(*)$ が成立する．

**6** $\Omega$ は $\mathbb{R}^2$ の領域とし，$u \in C^2(\Omega)$ とする．$x = (x_1, x_2) \in \Omega$ と $r > 0$ に対し $B_r(x) = \{y \in \Omega \,|\, |y - x| < r\}$ とおき, $\partial B_r(x)$ によって $B_r(x)$ の境界を表わす．ただし，$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ である．

(1) $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ であるとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(x)} \Big( \log |x - y| \Big) \Delta u(y) dy_1 dy_2$$

を計算することにより，次の等式を示せ.

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(x)} \Big[ u(y) \frac{\partial}{\partial n} \log |x - y| - \frac{\partial u(y)}{\partial n} \log |x - y| \Big] d\sigma_y$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{B_R(x)} \Big( \log |x - y| \Big) \Delta u(y) dy_1 dy_2.$$

ただし，$n$ は $B_R(x)$ の境界 $\partial B_R(x)$ の外向き単位法線ベクトル，$\frac{\partial}{\partial n}$ は $n$ 方向の方向微分である．また $d\sigma_y$ は $\partial B_R(x)$ の線素である．

(2) $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ となる任意の $x \in \Omega$ と $R > 0$ に対して

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y$$

が成立するものとする．このとき，$u$ は $\Delta u(x) = 0$ $(x \in \Omega)$ を満たすことを示せ.

**7** $B(H)$ をヒルベルト空間 $H$ の有界線型作用素全体, $I$ を $H$ の恒等作用素とする．以下 $\langle f, g \rangle$ は $f, g \in H$ の内積とし，$||f|| = \langle f, f \rangle^{1/2}$ とする．

(1) $T \in B(H)$ に対して次の二つの条件は同値であることを示せ.

(i) $T$ は可逆 (すなわち，$ST = TS = I$ となる $S \in B(H)$ が存在する．)

(ii) $T$ の共役作用素 $T^*$ は単射であり，ある定数 $\delta > 0$ が存在して任意の $f \in H$ に対して $||Tf|| \geq \delta ||f||$ が成り立つ.

(2) 以下 $H = L^2([0, 1])$ とし，$A \in B(H)$ を

$$(Af)(x) = x f(x), \quad f \in H$$

とする．任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して，0 に弱収束する $H$ の単位ベクトルの列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\{||(\lambda I - A) f_n||\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するものが存在することを示せ.

(3) $K$ を $H$ のコンパクト線型作用素として，$B = A + K$ とする．$B$ のスペクトル集合 $\sigma(B)$ は閉区間 $[0, 1]$ を含むことを示せ．ここで．$\sigma(B)$ は $\lambda I - B$ が可逆でない複素数 $\lambda$ の全体である.