平成 17 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ.

⊗ 解答時間は 4時間 である.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{\mathbf{1}}$ F を体とし，F の元からなる列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 1)$$

をみたすもの全体の集合を V とする．V は項別の和とスカラー倍で F 上のベクトル空間とみなす．V の F 上の次元を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 正数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，任意の $n \geq 1$ に対し

$$\frac{x_n + x_{n+2}}{2} \leq x_{n+1}$$

をみたすならば，この数列は単調非減少であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ ベクトル空間 $V,\ W$ と 1 次写像（線型写像）$f : V \to V,\ g : W \to W,\ \varphi : V \to W$ があり $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ をみたしているとする．
(1) f がべき零（すなわち，ある $n \geq 1$ について $f^n = 0$）で g が単射なら，$\varphi = 0$ であることを示せ．
(2) f が全射で g がべき零なら，$\varphi = 0$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ f は $[0, \infty)$ 上の連続函数で $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ をみたしているとする．このとき

$$\lim_{\alpha \to +0} \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = 1$$

を示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\sqrt[3]{2}$ は $\mathbb{Q}$ から始めて 2 次拡大を有限回繰り返してできる体に含まれないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 平面 $\mathbb{R}^2$ の異なる 2 点を p, q とする．コホモロジー群 $H^*(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}; \mathbb{R})$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\mathbb{C}$ 上の一様連続な正則函数は高々1 次の多項式であることを示せ．