平成15年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

⊗　問題は７題あり，次の３つの分野群に分かれる．分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題，分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題，分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題である．

⊗　この７問題中, ３問題 を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ.

⊗　解答時間は ４時間 である.

⊗　参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，選択表を上におき，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ整数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ (1) $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ は整閉でないことを示せ.

(2) p, q を平方因子を含まない 1 と異なる奇数で, $p \neq q$ とする. このとき, $R = \mathbf{Z}[\sqrt{p}, \sqrt{q}]$ は整閉でないことを示せ.

$\boxed{2}$ (1) 乗法の単位元 1 をもつ可換環 R は整域 A の部分環とする. 商体の間の拡大 $Q(A) \supset Q(R)$ が代数的ならば, A の $\{0\}$ でないイデアル I について $I \cap R \neq \{0\}$ であることを示せ.

(2) (1) において $Q(A)/Q(R)$ が代数拡大という条件をはずすと主張が必ずしも成り立たないことを, 例をあげて示せ.

(3) 可換環 A は部分環 R 上の整拡大とする. P は R の素イデアルとし, A の相異なる素イデアル Q_1, Q_2 が $R \cap Q_1 = R \cap Q_2 = P$ を満たすとする. Q_1 と Q_2 には含む含まれるの関係はないことを示せ.

$\boxed{3}$ $\mathbf{R}^3$ の単位球面 S^2 上のベクトル場で, 2 点 $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ 以外では 0 にならないもの全体を $\mathfrak{X}$ とかく. $\mathfrak{X}$ の無限個の元の列 X_1, X_2, X_3, $\cdots$ で次の性質を持つものが存在することを示せ.

$i \neq j$ ならば, $t \in [0,1]$ に連続に依存する $\mathfrak{X}$ の無限個の元の族 Y_t で $Y_0 = X_i$, $Y_1 = X_j$ なるものは存在しない.

$\boxed{4}$ 2 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^2$ とその上の相異なる 2 点 p, q を考える.

(1) $\mathbf{C}P^2$ から p をのぞいた空間 $\mathbf{C}P^2 - \{p\}$ の整係数ホモロジー群を計算せよ.

(2) $\mathbf{C}P^2 - \{p\}$ から $\mathbf{C}P^2$ への包含写像が整係数ホモロジー群に導く写像を求めよ.

(3) $\mathbf{C}P^2$ から 2 点をのぞいた空間 $\mathbf{C}P^2 - \{p, q\}$ の整係数ホモロジー群を計算せよ.

$\boxed{5}$ (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2} < +\infty$ を満たす正の数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対し，$f(z)\ (z \in \mathbf{C})$ を

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{z/a_k}$$

で定義する．このとき, $f(z)$ は全複素平面上で正則であることを示せ.

(2) $f(z)$ の零点を除いた実軸上で

$$\left(\frac{f'}{f}\right)' < 0$$

であることを示せ.

(3) $f'(z)$ の実軸上の零点は, 一位の零点であるか, $f(z)$ の零点となっているか, のいずれかであることを示せ.

$\boxed{6}$ $x, t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{1 + (x - t)^2}$$

とする.

(1) $\varphi_t(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{\varphi}_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{1}{1 + (x - t)^2}\, dx$$

を求めよ.

(2) $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ を含む $L^2(\mathbf{R})$ の線型閉部分空間は $L^2(\mathbf{R})$ と一致することを示せ.

$\boxed{7}$ $f(x)$ は $\mathbf{R}^3$ で定義された有界な可測函数とし,

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|} f(y)\,dy$$

と置く. また, $\chi(s) \in C^\infty(\mathbf{R})$ は

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & s \geq 2 \\ 0 & s \leq 1 \end{cases}$$

を満たすものとし, $\varepsilon > 0$ に対し

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3} \chi(|x-y|/\varepsilon)\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|} f(y)\,dy$$

と置く.

(1) $u_\varepsilon(x)$ および $\dfrac{\partial}{\partial x_j}u_\varepsilon(x)$ $(j = 1, 2, 3)$ は, $\varepsilon \to +0$ のとき, それぞれ $u(x)$ および $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\right) f(y)\,dy$ に $\mathbf{R}^3$ で一様に収束することを示せ.

(2) $\mathcal{B}^1(\mathbf{R}^3) = \{f \in C^1(\mathbf{R}^3) \mid \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ (i = 1, 2, 3)$ は $\mathbf{R}^3$ で有界 $\}$ とおく. $f \in \mathcal{B}^1(\mathbf{R}^3)$ のとき, $u_\varepsilon(x)$ の全ての 2 階偏導函数はそれぞれある有界な連続函数に収束することを確かめよ.

(3) $f \in \mathcal{B}^1(\mathbf{R}^3)$ のとき

$$(-\triangle + 1)u(x)$$

を求めよ.