平成15年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの全問を解答せよ.

⊗ 解答時間は 4時間 である.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ整数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbf{R}^4$ の部分空間を W とする. W が 2 次元となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ.

$\boxed{2}$ 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n\to\infty} n^2(a_{n+1} - a_n) = 1$$

を満たすとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

$\boxed{3}$ K を体とし, A を K の元を成分とする n 次正方行列とする. $h(x)$ を A の最小多項式とする. このとき, A が正則であるための必要十分条件は $h(0) \neq 0$ であることを示せ.

$\boxed{4}$ $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で定義された C^1 級の実数値函数で,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty$$

を満たすとする.

(1) $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は有限の値に収束することを示せ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して,

$$d(\varepsilon) = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x+\varepsilon) - f(x)|$$

とおく. このとき

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d(\varepsilon) = 0$$

を示せ.

$\boxed{5}$ 可換環 R に対して, 可逆な 2 次正方行列全体のなす群を $GL_2(R)$ で表すことにする. このとき, 自然な準同型

$$GL_2(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \longrightarrow GL_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

の核は, $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ と群として同型であることを示せ.

$\boxed{6}$ $\mathbf{R}^n$ のベクトル v, w に対して v と w の内積を $v \cdot w$ で表すことにする. $1 \leq k \leq n$ のとき,

$$X_{n,k} = \left\{(v_1,\ \ldots,\ v_k) \in (\mathbf{R}^n)^k \mid v_i \cdot v_j = \delta_{ij}\ (i,\ j = 1, \ldots,\ k)\right\}$$

とおく. $X_{n,k}$ は $(\mathbf{R}^n)^k$ の部分空間としてコンパクト集合であることを示せ.

$\boxed{7}$ $\mathbf{C}$ 上の有理型函数

$$f(z) = \frac{e^{-iz}}{z^3 - i}$$

を考える.

(1) $f(z)$ の極をすべて求めよ.

(2) 実軸上の複素積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

の値を求めよ.