

社会保障年金の数理

(Ver.1.2 : 20/August/2013)

廣瀬賢一

はじめに

社会保障、特に年金制度に関連して提起される様々な政策の効果を量的に評価し、また、自ら政策を提案していくためには、数理的な手法はなくてはならないものである。そうした数理的な手法のうち、筆者の日本における年金行政ならびに国際機関における技術協力の経験で有用とおもわれるもののいくつかを基礎的事項から説明するのが本書の目的である。

本書は六つの章から構成される。第1章から第3章までは年金数理の基礎をまとめたものである。扱われている内容は標準的なものであるが、年金数理の諸概念をなるべく明確に定式化しようつとめたことと、社会保障に関連した例をなるべく多くとり入れたことが特徴といえるかもしれない。第4章は公的年金制度の財政分析に有用な財政指標について述べ、これらを用いて長期的に保険料率を設定する方法について解説する。第5章は人口分析と人口推計の方法への入門である。第6章は所得分布の分析と所得格差の指標に関する数学的側面を扱う。

本書の内容は、筆者が2002–2006年にマーストリヒト大学において行なった講義および2011年に京都大学において行なった集中講義に基づく。本書をまとめるにあたってお世話になった、井川孝之（みずほ総合研究所）、大場聖也（京都大学）、中山素生（日本生命・京都大学）、弓場美裕（国民年金基金連合会）の各氏に感謝したい。

本書に残存する誤りは全て筆者の責に帰せられるものである。また、本書における意見にわたる部分は、筆者が現在所属する若しくは過去に所属した組織・機関の意見を反映するものではないことをお断りしておく。

廣瀬賢一

目次

	頁
第1章 ファイナンスの数学	1
1.1 利率の意味	1
1.2 複利計算	3
1.3 キャッシュフローとその現価	3
1.4 確率的キャッシュフローとその期待現価	7
1.5 応用 — 個人積立勘定と負債返済	8
1.6 内部収益率	11
第2章 生存モデルと生命表	16
2.1 生存関数	16
2.2 死力	17
2.3 平均余命	18
2.4 いくつかの死亡法則	18
2.5 確率変数を用いたアプローチ	21
2.6 確率過程を用いたアプローチ	23
2.7 生命表	25
2.8 生存関数の補間と死力の近似	27
第3章 生命年金	30
3.1 簡単な生命年金現価	30
3.2 いくつかの応用	32
3.3 年1回以上支払われる生命年金	33
3.4 連続生命年金	35
3.5 完全生命年金とその精密化	36
3.6 生命年金現価のみたす漸化式と微分方程式	41
3.7 確率論的アプローチ	42
3.8 生命年金現価と確定年金現価の間の不等式	45
3.9 生命保険（死亡一時金）	46
3.A 連生年金（特に遺族年金）	48
3.B 数学公式補遺	49
第4章 公的年金の財政分析の方法	54
4.1 公的年金制度の財政指標とそれらの意味	54
4.2 長期的収支均衡の条件と流動性確保の条件	58
4.3 保険料率の長期的な設定手法	59
4.4 先進国における財政再計算と財政指標の適用例	60

4.5 一般化スケールドプレミアム	65
4.6 補足と今後の課題	70
4.A 本来のスケールドプレミアム	72
4.B GDP 比でみた年金給付費	75
第5章 人口分析の方法と安定人口モデル	79
5.1 人口動態	79
5.2 人口推計の方法	79
5.3 安定人口	82
第6章 所得分布分析の方法	89
6.1 所得分布のモデル	89
6.2 ローレンツ曲線	90
6.3 所得分布とローレンツ曲線の対応	92
6.4 ジニ係数	94
6.5 所得分布の比較	95
6.6 所得再分配と貧困分析への応用	96
参考文献	103

第1章 ファイナンスの数学

1.1 利子率の意味

ある資産の価格に関して等価原理と呼ばれる次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\text{終価}) &= (\text{現価}) \times (\text{利子率}), \\ (\text{現価}) &= (\text{終価}) \times (\text{割引率}). \end{aligned}$$

資産の運用や借入（負債）に伴い生ずる利子は、異なる時点間の資産価格を換算する率である。すなわち、資産は時間により価格が異なり、利子率（利率）または割引率は現在と将来の価格を等価に結び付ける役割を果たす。

ある資産の価格が時間の関数 $P(t)$ として記述されるとする。このとき、 $W(t_1, t_2) = P(t_2)/P(t_1)$ は、この資産の時点 t_1 の価格と時点 t_2 における等価な価格との相対価格である。

$W(t_1, t_2)$ は次の性質を持つと仮定する：

- (I-1) 任意の t に対し、 $W(t, t) = 1$ ；
- (I-2) 任意の $t_1, t_2, t_1 < t_2$ に対し、 $W(t_1, t_2) > 1$ ；
- (I-3) 任意の t_1, t_2, t_3 に対し、 $W(t_1, t_2) \cdot W(t_2, t_3) = W(t_1, t_3)$ 。

第1は自明な条件であり、第2の条件は資産が稀少財であることを、第3の条件は裁定機会が存在しないことを意味する。

(I-1)と(I-3)から、 $W(t_2, t_1) = W(t_1, t_2)^{-1}$ 、すなわち、割引率は利子率の逆数となることに注意。これら三条件により W の形が制限される。実際、次の定理が成り立つ。

定理.

利力と呼ばれる関数 $\rho(t) > 0$ が存在して、 $W(t_1, t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt}$ とかける。

証明.

$R(t, T) = \frac{\log W(t, T)}{T-t}$ により平均利率を定義する（すなわち $W(t, T) = e^{R(t, T) \cdot (T-t)}$ となるように $R(t, T)$ を定めた）。瞬間利率としての利力を得るため、 $T \rightarrow t$ の極限をとる。すると、

$$\rho(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} \frac{\log W(t, T)}{T-t} = \frac{\partial}{\partial T} \log W(t, T) \Big|_{T=t} = \frac{W_2(t, t)}{W(t, t)} = W_2(t, t).$$

ここで、

$$W_2(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} W(t, T)$$

である。また、(I-1)を用いた。

一方、無裁定機会条件

$$W(s, t) \cdot W(t, u) = W(s, u)$$

の両辺を u に関して微分すると、

$$W(s, t) \cdot W_2(t, u) = W_2(s, u).$$

ここで $u = t$ とおくと、

$$W(s, t) \cdot W_2(t, t) = W_2(s, t)$$

となり、 $\rho(t)$ の定義より微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} W(s, t) = W(s, t) \cdot \rho(t)$$

を得る。これを積分すると、

$$W(s, t) = e^{\int_s^t \rho(\sigma) d\sigma}$$

となる。(証明終)

さらに、

$$(I-4) \quad \text{任意の } t_1, t_2, s \text{ に対し, } W(t_1 + s, t_2 + s) = W(t_1, t_2)$$

を仮定すれば $\rho(t) = \rho = \text{一定}$ となり、 $W(s, t) = e^{\rho(t-s)}$ となる。

注意. 上の微分方程式を $P(t)$ に関してかくと、 $\frac{d}{dt} P(t) = \rho(t) \cdot P(t)$ となる。これを積分して、 $P(t) = P(0) e^{\int_0^t \rho(\sigma) d\sigma}$ を得る。

時間の単位を年とする。 $1 + i_t = e^{\int_t^{t+1} \rho(\sigma) d\sigma}$ により、 t 年次(すなわち期間 $[t, t+1]$)における年利率 i_t を定義する。利力が一定 ρ のとき、年利率 i は $1 + i = e^\rho$ により定まる。

注意1. 経済学では利子を流動性選好により説明している。資産の流動性とはその資産がどれだけ容易に現金に換金できるかを意味し、利子は流動性を手放すことに対する報酬である。利子率の大きさ、すなわち ρ の大小は、資産の期待将来価値による。

注意2. 上記において、完全情報の前提をおいていることに注意する必要がある。利子は予め定められた利率が確実に支払われると仮定している。公的年金は、その積立金の大部分が国債に運用されておりこれらの前提を概ね満たすと考えられる。より一般に、利率が確率的でデフォルトリスクがある場合については後述する。さらに、利子率の市場における決定に関して年金基金の財政運営の影響がないものと仮定する。この仮定は、年金基金が国民経

済に比して相当な規模となっている場合には必ずしも妥当でない。しかし本書では、このような一般均衡効果は考慮しない。

1.2 複利計算

年利 $i > 0$ の銀行口座に1単位の金額を預け入れると仮定する。単利計算では、 n 年間の元利合計は $(1 + ni)$ となる。この場合、利息は元本へ繰り入れられない。一方、複利計算では、毎年末に利息は元本に繰り入れられ、その利息は翌年以降の利息を生むことになり、 n 年後の元利合計は、 $(1 + i)^n$ となる。これは $n > 1$ のとき $(1 + ni)$ よりも大きい。

実務上、単利は短期契約（通常1年未満）において用いられ、複利は長期契約において用いられる。

次に、年 m 回転化の複利を考える。すなわち、1年を m 期に分割し、各期末に利息を元本へ繰り入れる。年間の名称利率を $i^{(m)}$ とかくと、実質利率は、

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i = e^\rho$$

で与えられる。

注意. $i^{(1)} = i$, $\lim_{n \rightarrow \infty} i^{(n)} = \rho$ である。実際、 $i = i^{(1)} > i^{(2)} > i^{(3)} > \dots \rightarrow \rho$ となる。

参考. 貯金が元金の2倍になるのに何年かかるかを計算する69の規則というものがある。それは、「利力 $\rho\%$ のとき、69を ρ で割った答えが求める年数を与える」というものである。例えば、利力が6%ならば、69/6=11.5年となる。69の代わりに72を使えば、少し過大見積もりとなるが、より多くの約数を持つので計算は簡単になることがある。（69の規則を導け。ヒント: $\log_e 2 = 0.69$.）

1.3 キャッシュフローとその現価

本節の(1)と(2)では、利率は時間によらず一定であると仮定する。利率 i または利力 ρ に対応する割引率を $v = \frac{1}{1+i} = e^{-\rho}$ とかく。

(1) 離散時間の場合

(i) 一般論

離散時間の場合、キャッシュフローは、いつの時点でいくら支払われるかを定めたデータにより記述される：

$$U = (U_k, t_k)_{k=0}^{\infty} \quad \text{ここに, } 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots.$$

これらのデータは、時点 t_k で金額 U_k が支払われる契約を定めている。

上記のキャッシュフロー U の現価は次式により計算される。

$$PV(U) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \left(\frac{1}{1+i} \right)^{t_k} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k v^{t_k}.$$

一般に、数列 $A = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し、次式で定義される級数はその数列の母関数と呼ばれる。

$$G_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

逆に、数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の各項は、その母関数から次式により求めることができる。

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n G_A}{dx^n} (0).$$

(ii) 確定年金現価

年金とは、一定額が定期的に支払われる（すなわち $U_k = \text{一定}$ 、かつ、 $t_{k+1} - t_k = \text{一定}$ ）特別な型のキャッシュフローである。

$t_k = k$, $U_k = 1$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$)で与えられるキャッシュフローの現価を期初払い n 年確定年金現価と呼び、次の記号で表わす。

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = PV\{(1, k) | 0 \leq k \leq n-1\} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1-v^n}{1-v}.$$

図：



$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ が i によることを強調したいときは、 $\ddot{a}_{\overline{n}|}(i)$ ともかく。

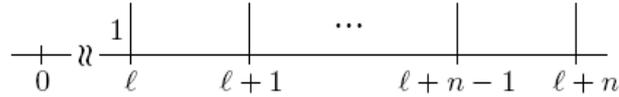
n が無限大のとき、永久年金現価と呼び、記号 $\ddot{a}_{\infty|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{1-v}$ で表わす。

同様に、様々なタイプの年金現価を以下に述べるキャッシュフローの現価として定義する。キャッシュフロー図を用いると現価の計算が簡明である。

a) l 年据置期間のある期初払い n 年確定年金現価

キャッシュフロー: $t_k = k + l, U_k = 1 (k = 0, 1, \dots, n - 1)$.

図:



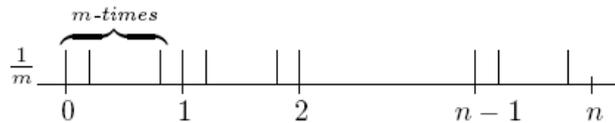
記号と計算式:

$${}_l\ddot{a}_{\overline{n}|} = PV\{(1, k) | l \leq k \leq l + n - 1\} = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^k = v^l \frac{1 - v^n}{1 - v}.$$

b) 年 m 回期初払い n 年確定年金現価

キャッシュフロー: $t_k = k/m, U_k = 1/m (k = 0, 1, \dots, mn - 1)$.

図:



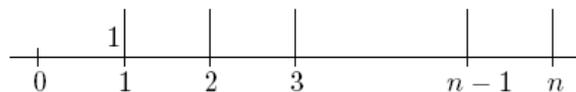
記号と計算式:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = PV\left\{\left(\frac{1}{m}, \frac{k}{m}\right) \mid 0 \leq k \leq mn - 1\right\} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mn-1} v^{\frac{k}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}}.$$

c) 期末払い n 年確定年金現価

キャッシュフロー: $t_k = k, U_k = 1 (k = 1, 2, \dots, n)$.

図:



記号と計算式:

$$a_{\overline{n}|} = PV\{(1, k) | 1 \leq k \leq n\} = \sum_{k=1}^n v^k = v \frac{1 - v^n}{1 - v}.$$

問題. 実務上, $a_{\overline{n}|}$ よりも $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ の方がよく用いられる理由を答えよ.

問題. $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1 = v^{-1}a_{\overline{n}|}$ を示し, キャッシュフロー図で説明せよ.

問題. $\frac{1}{m}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ を定義し, その計算式を導け.

(iii) 変額年金

支給額が時間とともに増加する年金の二つの例を考える。

第一は、年金額が一定額ずつ増加する場合である。キャッシュフローは、 $t_k = k - 1$, $U_k = k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とかける。この現価を表わす記号と計算式は次のとおり。

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = PV\{(k, k - 1) | 1 \leq k \leq n\} = \sum_{k=1}^n kv^{k-1} = \frac{1}{1-v} \left(\frac{1-v^n}{1-v} - nv^n \right).$$

問題. $(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{d}{dv} a_{\overline{n}|}$ を示せ。また、 $\frac{d}{di} \ddot{a}_{\overline{n}|}$ を計算せよ。(ヒント: 連鎖律)

問題. 計算によって、また、キャッシュフロー図を用いて、 $(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} k | \ddot{a}_{\overline{n-k}|}$ を示せ。

第二は、年金額が一定率で増加する場合である。これは、年金額が賃金や物価の上昇率によってスライドされる場合である。このキャッシュフローは、 $t_k = k$, $U_k = (1 + \beta)^k = w^k$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) とかける。この現価を表わす記号(本書でのみ用いる記号)と計算式は次のとおり:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{[\beta]} = PV\{(w^k, k) | 0 \leq k \leq n - 1\} = \sum_{k=0}^{n-1} w^k v^k = \frac{1 - (wv)^n}{1 - wv}.$$

この場合は、実質割引率を用いることにより、通常年金の場合に帰着される。

問題. $\frac{1}{1+j} = \frac{1+\beta}{1+i}$ (このとき $j \approx i - \beta$) とおけば、 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{[\beta]}(i) = \ddot{a}_{\overline{n}|}(j)$ となることを示せ。

(2) 連続時間の場合

連続時間の場合、キャッシュフローは時刻 $t \in [0, \infty)$ の関数 $f(t)$ により記述される。 t と $t + dt$ の間に支払われる額は $f(t)dt$ であるから、連続的キャッシュフロー $f(t)$ の現価は次式により定義される。

$$PV(f) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\rho t} dt.$$

これは、関数 $f(t)$ のラプラス変換 $(Lf)(\rho)$ とみなすことができることに注意しておく。

n 年確定年金現価の連続版は、 $\lambda_n(t) = \begin{cases} 1 & (t < n \text{ のとき}) \\ 0 & (t \geq n \text{ のとき}) \end{cases}$ により与えられる連続キャッシュフローの現価として定義される。このキャッシュフローは、ヘビサイド関数

$$H(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (t \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を用いて $\lambda_n(t) = H(n - t)$ とかける。

n 年連続払確定年金現価の記号と計算式は次のとおり：

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = PV(\lambda_n) = \int_0^n e^{-\rho t} dt = \frac{1}{\rho}(1 - e^{-\rho n}).$$

問題. $\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{\overline{n}|}^{(m)}$ を示せ。

注意. デルタ関数を用いれば、離散的キャッシュフロー $U = (U_k, t_k)_{k=0}^{\infty}$ は、連続キャッシュフロー $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \delta(t - t_k)$ とみなすこともできる。

(3) 利率が時間に依存する場合への一般化

上記の結果は、利率が時間とともに変動する場合にも、次のような修正を行えば、そのまま成り立つ。

$$\text{離散時間の場合： } PV(U) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k V_k \quad \text{ここに、} V_k = \prod_{s=1}^{t_k} v_s.$$

$$\text{連続時間の場合： } PV(f) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\int_0^t \rho(s) ds} dt.$$

後者の場合、現価はもはや変数 ρ に関する関数を見ることができないことに注意せよ。むしろ関数 $\rho(t)$ に対する汎関数 $(Lf)[\rho(t)]$ とみなさなければならない。

1.4 確率的キャッシュフローとその期待現価

ある事象（保険事故）が起こることを条件として額が支払われるように契約を修正するとしてよう。この場合に、キャッシュフローを記述するには、支払われる金額 U_k と時点 t_k に加え、保険事故が発生する確率 p_k も与える必要がある。

離散時間の場合、データ

$$U = (U_k, t_k, p_k)_{k=0}^{\infty} \quad \text{ここに, } 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots.$$

が確率的キャッシュフローを記述する。その期待現価を計算するために、まず期待値のキャッシュフローを計算する。 $E(U_k) = U_k p_k + 0(1 - p_k) = U_k p_k$ だから、 $E(U) = (U_k p_k, t_k)$ である。次いで、 $E(U)$ を通常のキャッシュフローとみてその現価を計算する。

$$EPV(U) = PV(E(U)) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k p_k v^k.$$

連続時間の場合、確率的キャッシュフローは、時間軸に沿って配列された確率変数の族（確率過程） $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ を考えることになる。いま、 $\phi_t(x)$ を X_t の確率密度関数とすると、 X_t の期待値は $f(t) = E[X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} x \phi_t(x) dx$ である。したがって、期待現価は次のようになる。

$$EPV(\{X_t\}) = PV(E[X_t]) = PV(f) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\rho t} dt.$$

一方、 $Z = PV(X_t) = \int_0^{\infty} X_t e^{-\rho t} dt$ と定める。これは実数値をとる確率変数である。 $\varphi(z)$ を Z の確率密度関数とすると、次式が成り立つ。

$$EPV(\{X_t\}) = E[PV(X_t)] = E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z \varphi(z) dz.$$

(なお、3.7節を参照)。

1.5 応用 — 個人積立勘定と負債返済

実際に、現価の表示式を求めることができるのは、特別なキャッシュフローについてのみである。より一般的な場合は、漸化式を用いて帰納的に現価を求めることができる。ここでは二つの応用について考える。

(1) 個人積立勘定

初期元本が F_0 で、掛金 C_t が t 年 ($t = 1, \dots, n$) の終わりに払い込まれる個人積立勘定を考える。 F_t を t 年末の勘定の残高とせよ。 t 年における残高の増加は、前年末の残高に付与される利息とその年に払い込まれる掛金から成る。したがって、

$$\Delta F_{t-1} = F_t - F_{t-1} = iF_{t-1} + C_t, \quad (*)$$

または

$$F_t = (1 + i)F_{t-1} + C_t. \quad (**)$$

(**)の両辺を $(1+i)^t$ で割って、 $t=1$ から n までたし上げると、

$$\frac{F_t}{(1+i)^t} - F_0 = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

となり、

$$F_n = (1+i)^n F_0 + \sum_{t=1}^n (1+i)^{n-t} C_t$$

を得る。

上式は、 n 年末の勘定の残高は、初期元本と払い込まれた掛金の終価の総和となっていることを意味する。

一方、(*)を $t=1$ から n まで総和することにより次を得る。

$$F_t - F_0 = \sum_{t=1}^n iF_{t-1} + \sum_{t=1}^n C_t.$$

これは、 n 年後の勘定の残高の増加分は、掛金の合計と各年末の勘定に係る利息の合計から成ることを意味する。

問題. 個人積立勘定を考える。 B_t を t ($t = 1, \dots, n$) 年末の勘定残高とし、初期元本 $B_0 = 0$ とせよ。より現実に近づけるため、 t 年央に掛金 C_t が支払われるとし、利率 i_t は時間に依存するものとする。この状況において、ある年から次の年への勘定残高の変化を記述する漸化式を導け（この場合、掛金に係る半年分の利息を考慮すべきであることに注意）。また、それを解いて B_t を C_t と i_t で表せ。

連続的な場合を考える。 t と $t + dt$ の間のキャッシュフローと利息は、それぞれ $C(t)dt$ と $\rho F(t)dt$ である。したがって

$$dF(t) = \rho F(t)dt + C(t)dt$$

すなわち

$$\frac{dF(t)}{dt} = \rho F(t) + C(t).$$

$t = 0$ の初期条件の下にこの微分方程式を解いて、次式を得る。

$$F(t) = e^{\rho t} F(0) + \int_0^t e^{\rho(t-s)} C(s) ds.$$

問題. 連続的な場合と離散的な場合の結果を比較し、一方の結果から他方を導くにはどの

ような読み替えが必要か述べよ.

問題. 利率が時間による場合, 上の結果は次のようになることを確認せよ.

$$F(t) = e^{\int_0^t \rho(s) ds} F(0) + \int_0^t e^{\int_s^t \rho(u) du} C(s) ds.$$

(2) 負債返済

いま, 金額 P_0 を借り, 各年末に支払われる額 R_1, R_2, \dots, R_n によって n 年間でこの負債を返済するという問題を考える. P_t ($t = 1, \dots, n$)を t 年末の負債残高とする. n 年末に支払いを完了するためには, $P_n = 0$ でなければならない.

P_t は, 前年末の負債額に1年間の利息が付加された額から返済額 R_t を引いた額に等しい. よって,

$$P_t = (1 + i)P_{t-1} - R_t.$$

整理すると,

$$\Delta P_{t-1} = P_t - P_{t-1} = iP_{t-1} - R_t.$$

上式は, 負債残高の変化は, 前年末の負債に係る利息による増加分と返済による減少分から成ることを意味する. 負債が増加しないためには, 借り手は少なくとも利息分を返済しなければならない.

前例と同様に, 第一の式の両辺に v^t ($v = \frac{1}{1+i}$) を乗じて, $t = 1$ から n まで総和すると,

$$P_0 - v^n P_n = \sum_{t=1}^n v^t R_t.$$

$P_n = 0$ の条件から, 次の予算制約式を得る.

$$P_0 = \sum_{t=1}^n v^t R_t = PV(\{R_t\}_{t=1}^n).$$

返済額 R_t は予算制約式を満たしている限り任意に選んでよい. 以下に三つの例を記す.

(i) 初期負債に係る利息のみ返済し, 最終年の終わりに元本を返済する方法. 各年の返済額と負債残高は次の通り.

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = \dots = R_{n-1} = iP_0; \quad R_n = (1+i)P_0; \\ P_1 &= P_2 = \dots = P_{n-1} = P_0; \quad P_n = 0. \end{aligned}$$

(ii) 一定額の支払いによって返済する方法. 予算制約式から, 返済額は次に等しい.

$$R_1 = R_2 = \dots = R_{n-1} = R_n = \frac{P_0}{a_{\overline{n}|}}$$

負債残高は次のように指数的に減少する.

$$P_t = P_0(1+i)^t \left(1 - \frac{a_{\overline{t}|}}{a_{\overline{n}|}}\right) \quad (1 \leq t \leq n).$$

(iii) 負債残高が直線的に減少して行くような返済方法もある:

$$P_t = P_0 \left(1 - \frac{t}{n}\right) \quad (1 \leq t \leq n).$$

返済額は次式で与えられる.

$$R_t = iP_t - \frac{1}{n}R_t = \frac{i(n-t+1) - 1}{n} P_0 \quad (1 \leq t \leq n).$$

注意 1. $n \rightarrow \infty$ の極限において, 三つの返済方法は全て永久償却に一致する. すなわち, 返済額は, 永久に支払われる利息のみから成る.

注意 2. (ii) の結果から, 退職一時金 P_0 を n 年確定年金化 (期末払) するとき, 年金額は $\frac{P_0}{a_{\overline{n}|}}$ に等しいことが分かる. 逆に, n 年間年末に 1 単位の年金を支払うために必要な初期元本は $P_0 = a_{\overline{n}|}$ (この値は n より小さい) に等しい. (連続的な場合にも同様の事実を定式化せよ.)

1.6 内部収益率

これまで, 与えられた利率の下で現価を評価する問題について調べてきた. ここでは逆の問題, すなわち, キャッシュフローとその現価の値が与えられたとき, それらを等価とする利率を見出せという問題を考える.

(1) 金融資産の内部収益率

s_1, s_2, \dots, s_n の n 回の支払いを約束する金融資産を考える. s_k の支払い日は時点 t_k とする. この資産を価格 p で購入したとすると, その収益率は次の方法により計算される.

(i) 単利 (支払いは利息を生まない)

$$(1 + it_n) \cdot p = \sum_{k=1}^n s_k \quad ; \quad \text{よって, } i = \frac{\sum_{k=1}^n s_k - p}{t_n \cdot p}.$$

(ii) 単利 (支払いは単利を生む)

$$(1 + it_n) \cdot p = \sum_{k=1}^n s_k \cdot (1 + i(t_n - t_k)) \quad ; \quad \text{よって, } i = \frac{\sum_{k=1}^n s_k - p}{t_n \cdot p - \sum_{k=1}^{n-1} s_k(t_n - t_k)}.$$

(iii) 複利 (支払いは複利を生む)

$$(1 + i)^{t_n} \cdot p = \sum_{k=1}^n s_k \cdot (1 + i)^{t_n - t_k} \quad \text{すなわち, } p = \sum_{k=1}^n s_k v^{t_k} \stackrel{\text{def}}{=} \phi(v).$$

この v に関する高次代数方程式に対しては、以下に述べる数値解析の手法により近似解が求められる。また、Excelには、内部収益率を計算する組み込み関数IRR()がある。

(a) はさみうち法

$\phi(v)$ は v ($0 \leq v \leq 1$)の増加関数であり、 $\phi(0) = 0 < p$ であり、通常 $\phi(1) = \sum_{k=1}^n s_k > p$ であることに注意せよ。 $\phi(1/2) > p$ または $< p$ に応じて、この方程式の解の存在範囲は $[0, 1/2]$ または $[1/2, 1]$ となる。この操作を続けることにより、解の存在範囲を逐次制限していくことができる。

(b) ニュートン・ラフソン法

解は次の逐次近似によって見つけられる。

$$v_{i+1} = v_i - \frac{\phi(v_i) - p}{\phi'(v_i)} = v_i - \frac{\sum_{k=1}^n s_k v_i^{t_k} - p}{\sum_{k=1}^n s_k t_k v_i^{t_k - 1}}.$$

ここで初期値は例えば $v_0 = 1$ ととる。

(c) $\phi(v)$ の性質を用いた方法

$\phi(v)$ は $0 \leq v \leq 1$ において凸な増加関数であるという事実を利用した、より簡単な逐次近似スキームは次により与えられる。

$$v_{i+1} = \frac{\phi(v_{sol})}{\phi(v_i)} v_i = \frac{p}{\sum_{k=1}^n s_k v_i^{t_k}} v_i.$$

ここで初期値は例えば $v_0 = 1$ ととる.

また, 所有者がこの資産を価格 q で時刻 τ ($t_{m-1} < \tau \leq t_m$) で売却した場合の収益率は, 各時点 t_k で支払われる $U_k = s_k$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) と τ で支払われる $U_m = q$ から成るキャッシュフローに対して同様の方法を適用することにより計算される.

例. 債券 政府や企業が資金調達のために発行する債券は, 元本 (額面価格) の定められた期限における償還と, 償還期間における利息 (クーポン) の支払いに関する債権債務関係を定めた有価証券である. こうした利付債の他, 利息の付かない割引債もある.

ある投資家が, 額面価格 F , クーポン C (年末払い), 償還期限までの残存期間 n 年の債券を P で購入したとする. 上の記号では, キャッシュフローは, $t_k = k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1} = C$, $s_n = C + F$ と記述される.

上の(i)から(iii)の方法に基づく利率の計算式は, 次の通り.

(i)

$$i = \frac{nC + F - P}{nP} = \frac{C + \frac{F-P}{n}}{P}.$$

(ii)

$$i = \frac{nC + F - P}{nP - \frac{n(n-1)}{2}C} = \frac{C + \frac{F-P}{n}}{P - \frac{n-1}{2}C}.$$

(iii) ((c)の逐次近似スキームを示す)

$$v_{i+1} = \frac{P}{\sum_{k=1}^n C v_i^k + F v_i^n} \cdot v_i.$$

問題. 上の方法(i)-(iii)を用いて様々な債券の収益率を評価せよ.

(2) 年金基金の運用利回り

ある年金基金の一年間の財政運営を考える. その年における時点を $t \in [0, 1]$ で表わす.

ここで

$F(t)$: 時点 t における資産

$D(t)$: 時点 t におけるキャッシュフロー密度

D : その年のキャッシュフロー ($= \int_0^1 D(t) dt$)

I : その年の運用収入

A : 年初の資産 ($=F(0)$)
 B : 年末の資産 ($=F(1)$)
 とおく.

「年間の資産の増分=その年の収支」の関係により, $B - A = D + I$ が恒等的に成り立つ.

この年金基金の利力を ρ とすると, 次式が成り立つ.

$$dF(t) = \rho F(t)dt + D(t)dt.$$

よって,

$$F(t) = F(0)e^{\rho t} + \int_0^t D(s)e^{\rho(t-s)} ds.$$

$A, B, D(t)$ が既知ならば, ρ の値は次式により決定される.

$$B = Ae^{\rho} + \int_0^1 D(t)e^{\rho(1-t)} dt.$$

運用収入は次式により与えられる.

$$I = B - A - D = \rho \int_0^1 e^{\rho(1-t)} \left[A + \int_0^t D(s) ds \right] dt \stackrel{\text{def}}{=} \rho W.$$

ここで, $W = \int_0^1 e^{\rho(1-t)} \left[A + \int_0^t D(s) ds \right] dt$ は, 運用元本平均残高である.

ρ が小さいときには, 次の近似が成り立つ:

$$i = e^{\rho} - 1 \approx \rho = \frac{I}{W}.$$

例. キャッシュフローは年央に発生する (すなわち, $\delta(t)$ をデルタ関数とし $D(t) = D\delta(t - \frac{1}{2})$)と仮定すると, 次式が成り立つ.

$$B = Ae^{\rho} + De^{\frac{1}{2}\rho} = A(1 + i) + D\sqrt{1 + i}.$$

近似式 $\sqrt{1 + i} \approx 1 + \frac{i}{2}$ を使えば,

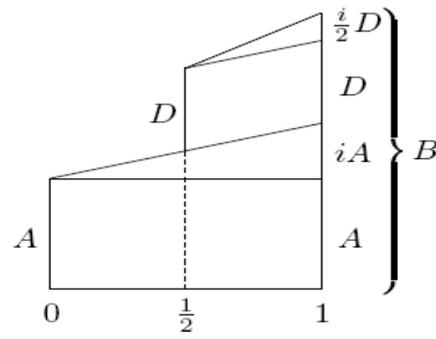
$$B = A(1 + i) + D \left(1 + \frac{i}{2} \right).$$

なお, 図 1.1 参照. この式と $B - A = D + I$ を連立させて D を消去し, i を A, B, I で表わせれば次式を得る.

$$i = \frac{2I}{A + B - I}$$

これは「ハーディー (Hardy) の公式」である.

図 1.1



第2章 生存モデルと生命表

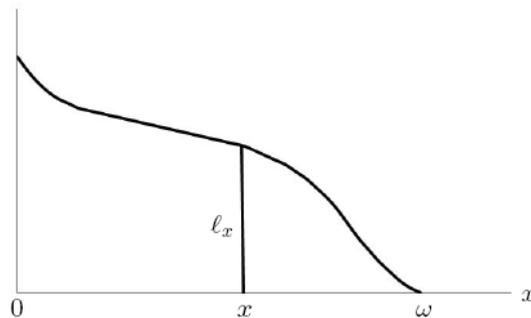
2.1 生存関数

生存関数は、人の年齢に関する累積生存率を表わす関数である。生存関数は、次の性質を持つ関数 $l: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ (すなわち、 $x \geq 0$ に対し、 $l(x) \geq 0$ の値をとる関数) である。

- (S-1) $l(x)$ は単調減少，すなわち、 $x < y$ ならば $l(x) > l(y)$ ；
- (S-2) $\lim_{x \rightarrow \infty} l(x) = 0$ 。なお、 $x \geq A$ において $l(x) = 0$ となるような A が存在するとき、そのような A の下限 ω を最終年齢と呼ぶ；
- (S-3) $l(x)$ は連続的に微分可能である (すなわち C^1 -級) 。

ここで、(S-1)と(S-3)から、 $l'(x) < 0$ が従うことに注意。

図 2.1 生存関数のグラフ



ここでは、上の性質を持つ関数 $l(x)$ が与えられているとする。記法上、 $l(x)$ を l_x とかくこともある。年齢 $x \geq 0$ (x は整数とは限らないことに注意)， $t \geq 0$ に対して、次を定義する。

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

これらの量は、次の意味を持つ。

- ${}_t p_x$ = x 歳の人が $x+t$ 歳まで生存する確率
- ${}_t q_x$ = x 歳の人が t 年以内に死亡する確率。

特に $t = 1$ のとき、 $q_x = {}_1 q_x$; $p_x = {}_1 p_x$ とかく。

また、 $t, u > 0$ について、

$${}_{t+u} p_x = {}_u p_{x+t} {}_t p_x$$

が成り立つ。

問題. 上の関係式の確率的意味を述べよ.

2.2 死力

年齢 $x > 0$ における死力を,

$$\mu(x) = \mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx} = -\frac{d \log l_x}{dx}.$$

と定義する. この定義から

$$-dl_x = \mu_x l_x dx$$

となる. この両辺を x から $x+t$ まで積分して, $l_x - l_{x+t} = \int_0^t \mu_{x+s} l_{x+s} ds$ を得る. したがって,

$${}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \int_0^t \mu_{x+s} \frac{l_{x+s}}{l_x} ds = \int_0^t \mu_{x+s} {}_sp_x ds.$$

また,

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \int_t^\infty \mu_{x+s} {}_sp_x ds.$$

上の式から, $\mu_{x+t} {}_tp_x dt$ は x 歳における余命 t の確率分布を表わしていることがわかる.

一方, 死力の定義式に戻って,

$$d \log l_x = -\mu_x dx$$

から始めて, 両辺を x から $x+t$ まで積分すると,

$$\log \left(\frac{l_{x+t}}{l_x} \right) = -\int_x^{x+t} \mu_s ds = -\int_0^t \mu_{x+s} ds$$

を得る. よって,

$$l_{x+t} = l_x e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \quad \text{または} \quad {}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}.$$

この表現を偏微分して, 次の関係式を得る.

$$\frac{\partial {}_tp_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds} \right) = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds} (-\mu_{x+t} + \mu_x) = {}_tp_x (\mu_x - \mu_{x+t}),$$

$$\frac{\partial {}_tp_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds} \right) = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds} (-\mu_{x+t}) = -{}_tp_x \mu_{x+t}.$$

後者の方程式は上述の ${}_t p_x = \int_t^\infty \mu_{x+s} {}_s p_x ds$ を t で偏微分することによっても導かれる。

問題. $\frac{d}{dx}(l_x \mu_x) = -\frac{d^2}{dx^2} l_x$; $\mu_{x+t} = -\frac{\partial \log {}_t p_x}{\partial t}$ を示せ.

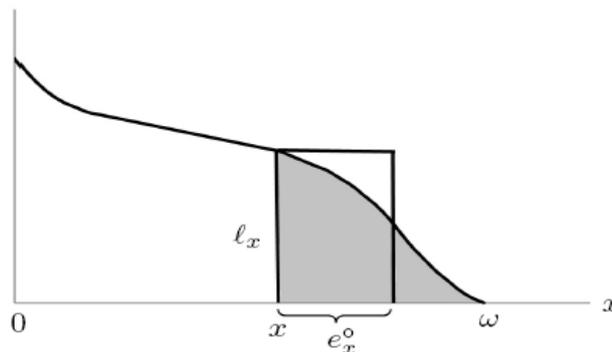
2.3 平均余命

年齢 $x \geq 0$ における完全平均余命を

$$e_x^\circ = \frac{1}{l_x} \int_0^\infty l_{x+t} dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt.$$

と定義する. x 歳の完全平均余命は, 図形的には, 生存関数の x 歳以上の積分の値と等面積になる縦 l_x の長方形の横の長さに等しい.

図 2.2 平均余命の図形的意味



問題. $e_x^\circ = \int_0^\infty t \mu_{x+t} {}_t p_x dt$ を示せ. (ヒント 部分積分) ; $\frac{de_x^\circ}{dx} = \mu_x e_x^\circ - 1$ を示せ. (ヒント 微分し 2.2 節で導いた結果を用いよ.)

問題. e_x° は必ずしも x の減少関数でないが, $x + e_x^\circ$ は x の増加関数であることを示せ. この事実に直観的な説明を与えよ.

また, $l_x : l_{x+t} = 2 : 1$ となる t を x 歳における余命中位数 (半減期) と呼ぶ.

2.4 いくつかの死亡法則

(i) ド・モアブル (de Moivre) の法則

この法則は, $l_x = l_0 \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^\alpha$, ($\alpha > 0$) により与えられる.

問題. この法則の下で, $\mu_x = \frac{\alpha}{\omega-x}$, $e_x^\circ = \frac{\omega-x}{\alpha+1}$ となることを示せ.

ド・モアブルが1724年に示したのは, $\alpha = 1$ の一次関数の場合である. これはきわめて単純化されたモデルであり, 様々な量が容易に計算できる.

(ii) ワイブル (Weibull) の法則

この法則は, $l_x = l_0 \exp\left(-\left(\frac{x}{\rho}\right)^\theta\right)$ により定義される. 死力は $\mu_x = \frac{\theta}{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{\theta-1}$ で与えられる.

(iii) ゴムパーツ - メーカム (Gompertz-Makeham) の法則

この法則は, 死力を用いて $\mu_x = A + Be^{\gamma x}$, ($A, B, \gamma > 0$) と定義される. これは, 同値な表現で $\mu_x = A + Bc^x$, ($\gamma = \log c$) ともかける. このモデルは, 生命表の高年齢における補正に用いられる.

ゴムパーツ - メーカムの法則の下での生存関数を計算すると,

$$\begin{aligned} l_x &= l_0 \exp\left(\int_0^x \mu_s ds\right) \\ &= l_0 \exp\left(-\int_0^x (A + Be^{\gamma s}) ds\right) \\ &= l_0 e^{-Ax - \frac{B}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)} = k s^x g^{c^x} \end{aligned}$$

となる. ここで, $c = e^\gamma > 1$, $s = e^{-A} < 1$, $g = e^{-\frac{B}{\gamma}} < 1$, $k = l_0 e^{\frac{B}{\gamma}}$.

これより, 完全平均余命は次の通り計算される.

$$e_x^\circ = \int_0^\infty t p_x dt = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) dt = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t (A + Be^{\gamma(x+s)}) ds\right) dt$$

において,

$$\int_0^t (A + Be^{\gamma(x+s)}) ds = At + Be^{\gamma x} \int_0^t e^{\gamma s} ds = At + \frac{Be^{\gamma x}}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1) = At + P(e^{\gamma t} - 1)$$

(ここで $P = \frac{Be^{\gamma x}}{\gamma}$ とおいた) であるから,

$$e_x^\circ = \int_0^\infty \exp(P - At - Pe^{\gamma t}) dt = e^P \int_0^\infty e^{-At - Pe^{\gamma t}} dt.$$

ここで、 $z = Pe^{\gamma t}$ すなわち $dz = \gamma Pe^{\gamma t} dt = \gamma z dt$ と変数変換すると、 $dt = dz/\gamma z$ となり、次を得る.

$$\begin{aligned} e_x^\circ &= e^P \int_0^\infty e^{-At} e^{-Pe^{\gamma t}} dt \\ &= e^P \int_P^\infty \left(\frac{z}{P}\right)^{-\frac{A}{\gamma}} e^{-z} \frac{dz}{\gamma z} \\ &= \frac{1}{\gamma} P^{\frac{A}{\gamma}} e^P \int_P^\infty z^{-\frac{A}{\gamma}-1} e^{-z} dz = \frac{1}{\gamma} P^{\frac{A}{\gamma}} e^P \Gamma\left(-\frac{A}{\gamma}, P\right). \end{aligned}$$

ここで、 $P = \frac{Be^{\gamma x}}{\gamma}$ で、 $\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ は (第2種) 不完全ガンマ関数である.

注意. ベンジャミン ゴムパーツが1825年の論文でこの法則を導いた際に「人の死に抗する力は、その力自身に比例して減少する」と考えた. $1/\mu_x$ を彼が述べた「死に抗する力」の数学的表現とみなすならば、この法則は $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -\gamma \frac{1}{\mu_x}$ とかける. この方程式を解いて、 $\mu_x = Be^{\gamma x}$ を得る. 一方、同じ論文で、彼は「死亡は二つの共存する要因による. 一つは予期できない偶発的な要因であり、もう一つは死に抗する力の衰弱による。」と述べている. この考え方に忠実に沿って、追加的な定数項Aを導入することによって上のモデルを修正したのがメーカム (1860年) である.

例. ゴムパーツ-メーカムの法則の特別な場合

(i) $B = 0$ の場合 (死力一定または指数分布)

この場合、 $\mu_x = A$. よって、 $l_x = l_0 e^{-Ax}$, $e_x^\circ = \frac{1}{A}$.

(ii) $A = 0$ の場合 (ゴムパーツの法則)

この場合、 $l_x = l_0 e^{-\frac{B}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)}$, $e_x^\circ = -\frac{1}{\gamma} e^P \text{Ei}[-P]$ ここに、 $\text{Ei}[z] = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt$, $P = \frac{Be^{\gamma x}}{\gamma}$.

注意. より一般的には、 $\mu_x = \sum_{i=0}^m A_i x^i + \sum_{j=1}^n B_j e^{\gamma_j x}$, ($A_i, B_j, \gamma_j > 0$) というモデルが考えられる.

問題. 上記の一般的なモデルの次の特別な場合について l_x を求めよ.

- (a) $m = 1, n = 1$ (メーカムの第2法則) ;
 (b) $m = 0, n = 2$ (ラザルス, ハーディー) .

2.5 確率変数を用いたアプローチ

これまでの節においては存在を仮定した生存関数を用いて様々な量を構成し、それらの確率的解釈を与えてきた。この節では、理論の出発点として確率変数を取って等価な理論が得られることを示す。このアプローチは、生存モデルの基本的な概念を確率論の言葉で明確に定式化できるという利点を持つ。

この理論の出発点は、出生時の余命を表わす連続確率変数 T である。 T は $(0, \omega]$ の値をとる。その分布関数を $\Phi(t) = \Pr(T \leq t)$ で表わす。生存モデルの分析においては、生存関数（すなわち、1-分布関数） $\tilde{\Phi}(t) := 1 - \Phi(t) = \Pr(T > t)$ を用いる方が便利である。確率密度関数は $\phi(t) = \Phi'(t)$ により定義される。確率密度関数の意味は $\phi(t)dt = \Pr(t < T \leq t + dt)$ により与えられる。

死力を $\mu(t) = \frac{\phi(t)}{\tilde{\Phi}(t)} = -\frac{d}{dt} \log \tilde{\Phi}(t)$ により定義する。死力の意味は、

$$\mu(t)dt = \frac{\phi(t)dt}{\tilde{\Phi}(t)} = \frac{\Pr(t < T \leq t + dt)}{\Pr(T > t)} = \Pr(T \leq t + dt | T > t)$$

により与えられる。

年齢 $x \geq 0$ における余命を、「条件付き」確率変数 $T_x = (T - x) | (T > x)$ で定める。 $T_0 = T$ である。

T_x に関する基本的な量を以下のように定義する。

$$\Phi(t | x) = \Pr(T_x \leq t) = \Pr(T \leq x + t | T > x) = \frac{\Pr(x < T \leq x + t)}{\Pr(T > x)} = 1 - \frac{\tilde{\Phi}(x + t)}{\tilde{\Phi}(x)},$$

$$\tilde{\Phi}(t | x) = \Pr(T_x > t) = \Pr(T > x + t | T > x) = \frac{\Pr(T > x + t)}{\Pr(T > x)} = \frac{\tilde{\Phi}(x + t)}{\tilde{\Phi}(x)},$$

$$\phi(t | x) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t | x) = -\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi}(t | x) = \frac{\phi(x + t)}{\tilde{\Phi}(x)}.$$

このとき、確率測度 $d\Phi(t | x) = \phi(t | x)dt$ は T_x の確率分布であり、次が成り立つ。

$$d\Phi(t | x) = \phi(t | x)dt = \Pr(t < T_x \leq t + dt).$$

また、

$$\mu(t | x) = \frac{\phi(t | x)}{\tilde{\Phi}(t | x)} = -\frac{\partial}{\partial t} \log \tilde{\Phi}(t | x)$$

と定義する. この量の確率的意味は以下で示される.

これらの量を用いて得られる重要な関係式を以下に列挙する.

第一に,

$$\tilde{\Phi}(t+u|x) = \tilde{\Phi}(u|x+t) \cdot \tilde{\Phi}(t|x) \quad (2.1)$$

が成り立つ. この関係式は次を意味する.

$$\Pr(T > x+t+u | T > x) = \Pr(T > x+t+u | T > x+t) \cdot \Pr(T > x+t | T > x). \quad (2.1')$$

第二に, $\frac{\phi(t|x)}{\tilde{\Phi}(t|x)} = \frac{\phi(x+t)}{\tilde{\Phi}(x+t)}$ より, $\mu(t|x) = \mu(x+t)$ となることに注意して, 死力の定義から,

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi}(t|x) = -\mu(x+t) \tilde{\Phi}(t|x) \quad (2.2)$$

を得る. この関係式の意味は次の通り.

$$\mu(x+t) \tilde{\Phi}(t|x) dt = d\Phi(t|x) = \Pr(t < T_x \leq t+dt). \quad (2.2')$$

特に, $t=0$ とおくと, $\tilde{\Phi}(0|x) = 1$ に注意して, 次を得る.

$$\mu(x) dt = \Phi(dt|x) = \Pr(T \leq x+dt | T > x). \quad (2.2'')$$

第三に, 式(2.2)を t に関して積分すると, 初期条件 $\tilde{\Phi}(0|x) = 1$ に注意して,

$$\tilde{\Phi}(t|x) = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+s) ds\right) \quad (2.3)$$

を得る.

第四に, 式(2.1)に $\frac{\partial}{\partial t} \cdot |_{t=0}$ を作用させ, 式(2.2)を用いると (または, 式(2.3)を微分して),

$$-\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi}(t|x) = (\mu(x) - \mu(x+t)) \tilde{\Phi}(t|x) \quad (2.4)$$

を得る.

第五に, 式(2.2)と式(2.2'')を用いて,

$$\tilde{\Phi}(t|x) = \int_t^\infty d\Phi(s|x) = \int_t^\infty \mu(x+s)\tilde{\Phi}(s|x)ds = \int_t^\infty \Phi(ds|x+s)\tilde{\Phi}(s|x) \quad (2.5)$$

となる. この関係は次を意味する.

$$\begin{aligned} \Pr(T > x+t | T > x) &= \int_t^\infty \Pr(T \leq x+s+ds | T > x+s) \cdot \Pr(T > x+s | T > x) \\ &= \int_t^\infty \Pr(x+s < T \leq x+s+ds | T > x). \end{aligned} \quad (2.5')$$

問題. $\Phi(t|x) = {}_tq_x$; $\tilde{\Phi}(t|x) = {}_tp_x$ とかいたときに, 本節で導いた関係式に対応する 2.1 節, 2.2 節の関係式を述べよ.

問題. $P(x|x+t) = \tilde{\Phi}(t|x)$ とおく. $P(x|x+t) \leftrightarrow W(x,x+t)$, $\mu(x) \leftrightarrow \rho(x)$ の比較により, 生存モデルと (第 1 章で述べた) 利子率モデルの間の類似を議論せよ.

年齢 $x \geq 0$ における完全平均余命は T_x の期待値として定義される.

$$e_x^\circ = E[T_x] = E[T-x | T > x] = \int_0^\infty td\Phi(t|x) = \int_0^\infty \tilde{\Phi}(t|x)dt.$$

また, x 歳の余命中位数は, $\tilde{\Phi}(t|x) = \frac{1}{2}$ となる期間 t として定義される.

問題. $\text{Var}[T_x]$ を与える式を導け.

問題. 確率変数 T について, 上限付き期待値 $E[T;x]$ を $E[T;x] = \int_0^x t\phi(t)dt + x\tilde{\Phi}(x)$ により定義する. すなわち, 上限 x を考慮した T の値を表わす確率変数: $T \wedge x = \min(T, x)$ を考え, $E[T;x] = E[T \wedge x]$ とおく. このとき $E[T;x]$ と e_x° の間には $E[T] = E[T;x] + e_x^\circ \tilde{\Phi}(x)$ という関係が成り立つことを示せ.

2.6 確率過程を用いたアプローチ

前節で述べた確率変数を用いたアプローチは, (時間が陽に現れないという意味で) 静的であるという側面をもつ. ここでは, 確率過程を用いて, 時間に沿って生存状態の推移を追跡するアプローチを説明する.

まず最初に

$$\Lambda^{(x)}(t) = H(T_x - t) = \begin{cases} 1 & (T_x > t \text{ のとき}) \\ 0 & (T_x \leq t \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する. $\Lambda(t) = \Lambda^{(0)}(t)$ とかく. これらの確率変数は, 各時点 t において生存状態を観測し, 生存ならば値 1, 死亡ならば値 0 を返す二値変数である.

T_x が実現値 $T_x = s$ をとったときの $\Lambda^{(x)}(t)$ の時間発展をみると, 次の見本路を得る.

$$\lambda_s(t) = \Lambda^{(x)}(t) |_{T_x=s} = H(s - t).$$

$\Lambda^{(x)}(t)$ の分布は, 次により決まる.

$$\Pr(\Lambda^{(x)}(t) = 1) = \Pr(T_x > t) = \Pr(\Lambda(x+t) = 1 | \Lambda(x) = 1) = \Pr(T > x+t | T > x).$$

確率過程 $\{\Lambda^{(x)}(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ を特徴づける上の基本的な量は遷移確率と呼ばれ, $P(x | x+t)$ という記号で表わされる.

瞬間遷移確率としての遷移力は次により定義される.

$$\mu(x) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x | x+t) - P(x | x)}{t} = -\left. \frac{\partial}{\partial t} P(x | x+t) \right|_{t=0} = -P_2(x | x).$$

問題. 上で定義した $\mu(x)$ は 2.5 節で定義した死力と同一であることを示せ.

以上をまとめると, 任意の $t \geq 0$ に対して, 次の一連の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} E[\Lambda^{(x)}(t)] &= \int_0^\infty \lambda_s(t) d\Phi(s | x) = \int_t^\infty d\Phi(s | x) = \tilde{\Phi}(t | x) \\ &= \Pr(T_x > t) = \Pr(\Lambda^{(x)}(t) = 1) = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \end{aligned}$$

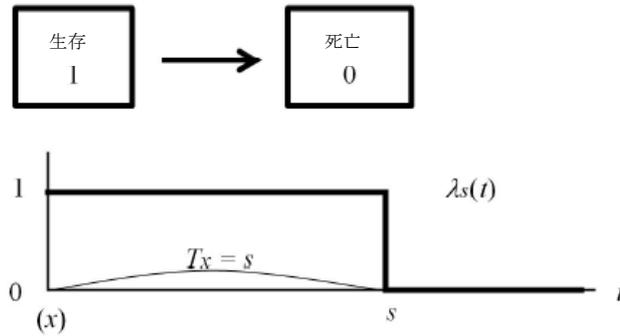
問題. 大数の法則を用いて, 見本路と生存関数の関係を議論せよ.

注意. 確率過程の言葉では, $\{\Lambda^{(x)}(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ は {生存=1, 死亡=0} の2状態をとるマルコフ過程 (かつ死亡状態 0 は吸収的) であると述べることができる. 望むなら, このマルコフ過程の性質から出発して等価な理論を再構築することができる¹. 例えば, T_x はこの過程から次により定義される:

$$T_x = \sup \{t | \Lambda^{(x)}(t) = 1\}.$$

¹ 確率過程の言葉で保険数学を記述するアプローチを説明した日本語の本として次の近著をあげておく.
京都大学理学部アクチュアリーサイエンス部門編, 『確率で考える生命保険数学入門』, 岩波書店, 2012. (特に第12, 13章).

図 2.3 確率過程による生存モデルとその見本路



この観点から、例えば関係式

$$P(x | x + t + u) = P(x | x + t) \cdot P(x + t | x + t + u)$$

は、次の様に示される。見やすさのため $\Lambda(x) = \Lambda_x$ 等とかく。

$$\begin{aligned} & \Pr(\Lambda_{x+t+u} = 1 | \Lambda_x = 1) \\ &= \Pr(\Lambda_{x+t+u} = 1 \cap \Lambda_{x+t} = 1 | \Lambda_x = 1) + \Pr(\Lambda_{x+t+u} = 1 \cap \Lambda_{x+t} = 0 | \Lambda_x = 1) \\ &= \Pr(\Lambda_{x+t+u} = 1 | \Lambda_{x+t} = 1 \cap \Lambda_x = 1) \cdot \Pr(\Lambda_{x+t} = 1 | \Lambda_x = 1) \\ &= \Pr(\Lambda_{x+t+u} = 1 | \Lambda_{x+t} = 1) \cdot \Pr(\Lambda_{x+t} = 1 | \Lambda_x = 1). \end{aligned}$$

確率過程によるアプローチは、生存状態の時間発展を追うという直観的な描像が得られるという利点の他に、多状態モデルへの一般化が容易にできるという利点をもつ¹。

問題. 社会保障制度の観点から、個人のとり得る状態として{就業, 失業, 退職, 障害, 死亡}の5つを考える。これらの状態間の遷移について考察せよ（遷移図を描け）。遷移率の推定のためにはどのようなデータが必要か、また、どのような方法で推定できるか。

2.7 生命表

これまでの理論的考察においては滑らかな生存関数の存在を仮定してきたが、実際の計算においては、生存関数の整数値の年齢における関数値（生存数）を数表化したものが用いられる：

$$l_0 > l_1 > l_2 > l_3 > \dots > l_{\omega-1} > l_{\omega} = 0.$$

生命表は、生存数とそれに関連した次の関数の値を数表にして示したものである。

¹ 最も単純な生存-死亡の2状態モデルを超えて3つ以上の状態の間の遷移を考える場合、遷移確率が現在占めている状態のみに依存するというマルコフ性を仮定することは適切ではないと考えられる。これを修正して、例えば、2.6節末の問題で述べたような状況では、遷移確率は過去にその個人が占めた各状態における滞在時間に依存するという仮定が考えられる。

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

さらに、次を定義する.

$$L_x = \int_x^{x+1} l_t dt \quad ; \quad T_x = \sum_{t=x}^{\infty} L_t = \int_x^{\infty} l_t dt \quad ; \quad m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x}.$$

ここに、 m_x は中央死亡率と呼ばれる。なお、上の記号 T_x は、2.5-2.6節で用いた x 歳時の余命を表わす確率変数とは異なることに注意。

台形近似

$$L_x = \int_x^{x+1} l_t dt \approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

を用いて次を得る.

$$T_x = \sum_{t=0}^{\infty} L_{x+t} \approx \frac{l_x}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} \quad ; \quad m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x} \approx 2 \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x + l_{x+1}} = 2 \frac{1 - p_x}{1 + p_x} = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x}.$$

簡略平均余命は、次式で定義される.

$$e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}.$$

簡略平均余命と完全平均余命の間には次の関係がある.

$$e_x^{\circ} \approx e_x + \frac{1}{2}.$$

問題. オイラー-マクローリンの総和公式を用いて上式を示せ.

x 歳時の余命を表わす連続確率変数 T_x の整数値の丸めを次のように定義する.

$$K_x = [T_x] - 1.$$

ここで、 $[x]$ は、 x 以上の最小の整数を表す。 K_x は離散確率変数であり、 $0, 1, 2, \dots, [\omega - x] - 1$ の値をとる。

生命表から、 K_x の確率分布は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \Pr(K_x = k) &= \Pr(k < T_x \leq k + 1) = \Pr(\Lambda^{(x)}(k + 1) = 0 \mid \Lambda^{(x)}(k) = 1) \\ &= \tilde{\Phi}(k \mid x) - \tilde{\Phi}(k + 1 \mid x) = \Phi(1 \mid x + k) \cdot \tilde{\Phi}(k \mid x) = q_{x+k} \cdot {}_k p_x = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}. \end{aligned}$$

また、上で定義した簡略平均余命は、次のようにかける。

$$e_x = E[K_x] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \Pr(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q_{x+k} \cdot {}_k p_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x.$$

信頼できる生命表が無い国においては、モデル生命表を用いることが多い。途上国に対するモデル生命表として広く利用されているのは、コール - デメミーによるものと国連によるものがある¹。国連が作成したモデル生命表には、5つの地域型があり、各地域型について平均寿命が35年から75年まで1年刻みでの生命表がある²。国連モデル生命表は次の8パラメータ式を使用している。

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D \exp(-E(\log x - \log F)^2) + \frac{GH^x}{1 + GH^x}.$$

使用するモデル生命表の選択は、通常、平均寿命や断片的に得られたデータを手がかりに行われる。

2.8 生存関数の補間と死力の近似

生命表では、通常、整数年齢における生存関数の値のみ示されているが、1年に満たない期間を含む年齢に関しては、これらの値を補間する必要が生ずる。以下に、三つの主な補間方法を述べる。以下において、 x は整数とし、 $s \geq 0$ 、 $t > 0$ 、 $s + t < 1$ とする。

(i) 死亡の一様分布: $l_{x+t} = (1 - t)l_x + tl_{x+1}$ あるいは ${}_t q_x = tq_x$ と仮定する。この仮定の下では、

¹ Coale, A. J. and P. Demeny. Regional Model Life Tables and Stable Populations. Princeton University Press. 1966.
Coale, A. J. and G. Guo. Revised regional model life tables at very low levels of mortality. *Population Index* 55(4). 1989. pp.613-643.
United Nations. *Model life tables for developing countries*. Population Studies, 77. New York: United Nations. 1982.

² 2010年に、国連は、人口推計の必要から、モデル生命表を平均寿命100年まで拡張した。以下を参照。
Li, N. and P. Gerland. "Modifying the Lee-Carter Method to Project Mortality Changes up to 2100". Paper presented at the 2011 Annual Meeting of the Population Association of America (PAA) in Session 125: Formal Demography I: Mathematical Models and Methods on 1 April 2011.

$${}_tq_{x+s} = \frac{{}_tq_x}{1 - sq_x} ; \mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - tq_x}.$$

(ii) 死力一定: $\mu_{x+t} = \mu$. これは指數的補間 $\log l_{x+t} = (1-t)\log l_x + t\log l_{x+1}$ と同じである. この仮定の下では,

$${}_tq_{x+s} = 1 - e^{-\mu t} ; \mu_{x+t} = \mu.$$

(iii) バルドウッチ (Balducci) 補間: $\frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1-t}{l_x} + \frac{t}{l_{x+1}}$.

この仮定の下では,

$${}_tq_{x+s} = \frac{{}_tq_x}{1 - (1-t-s)q_x} ; \mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - (1-t)q_x}.$$

(iv) 他の補間法

次の年齢区間と両端において滑らかに (すなわち 1 次微分まで連続に) 曲線が接続する多項式補間を適用する. 最も簡単な公式の一つは, キング - カルプ (King-Karup) の補間公式である.

$$l_{x+t} = l_x + t\Delta l_{x-1} + \frac{1}{2}t(t+1)\Delta^2 l_{x-1} + \frac{1}{2}t^2(t-1)\Delta^3 l_{x-1}.$$

ここで Δ は前進差分: $\Delta l_x = l_{x+1} - l_x$ である. この公式では l_x, l_{x+1} の値のみならず $l_{x-1}, l_x, l_{x+1}, l_{x+2}$ の値が必要になることに注意せよ. これを微分することにより μ_{x+t} を計算できる.

データの前進値と後進値を対称に扱う場合, テーラー展開

$$l(x \pm h) = l(x) \pm l'(x)h + \frac{1}{2!}l''(x)h^2 \pm \frac{1}{3!}l'''(x)h^3 + \dots$$

の右辺第2項までとり $h = 1$ とおくことにより, 次の3点近似式が得られる.

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx} \approx \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x}.$$

また上のテーラー展開の右辺第3項までとり $h = 1, 2$ とおくことにより, 5点近似式

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx} \approx \frac{8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12l_x}$$

が得られる.

注意. これらの結果はスターリング (Stirling) の補間公式を微分することにより得られる.

(3.B節 数学公式補遺を見よ.)

一方, ${}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds}$ を用いて, 近似式

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} \approx \int_x^{x+1} \mu_s ds = -\log p_x = \log\left(\frac{1}{1-q_x}\right) \approx \frac{q_x}{1-\frac{q_x}{2}} = m_x$$

を得る.

第3章 生命年金

この章では、前二章で述べた利子率モデルと生存モデルの両者を総合し、生命年金について論ずる。

3.1 簡単な生命年金

生命年金は、受給者が生存している限り各年初に1単位の年金を支払う契約である。年金開始年齢が x 歳の期初払い終身生命年金現価は、

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

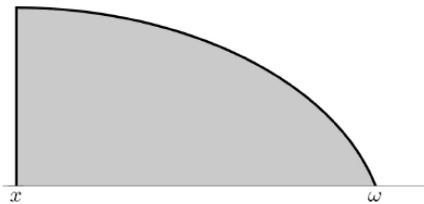
となる。なお、計算基数 $D_x = l_x v^x$ を用いると、上式は次のように表せる。

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{x+k} v^{x+k}}{l_x v^x} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}.$$

生命年金現価は、受給者の生存確率を支払い確率とする確率的キャッシュフローの期待現価とみなすことができる。すなわち、

$$\ddot{a}_x = EPV\{(1, k, {}_k p_x) \mid k = 0, 1, 2, \dots\} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x.$$

キャッシュフロー図（概念図、以下同様）：

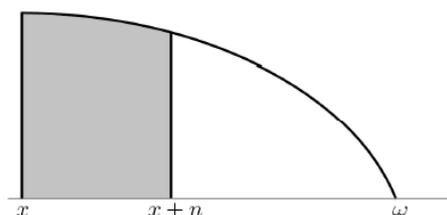


以下に、いくつかの条件のついた生命年金現価の例をあげる（全て期初払いとする）。

(i) n 年有期生命年金現価

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = EPV\{(1, k, {}_k p_x) \mid 0 \leq k \leq n-1\} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k}.$$

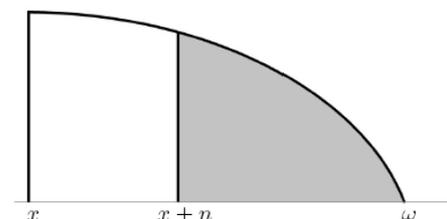
キャッシュフロー図：



(ii) n 年据置終身生命年金現価

$${}_n|\ddot{a}_x = EPV\{(1, k, {}_k p_x) \mid k \geq n\} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{1}{D_x} \sum_{k=n}^{\infty} D_{x+k}.$$

キャッシュフロー図：



(iii) n 年保証付終身生命年金現価

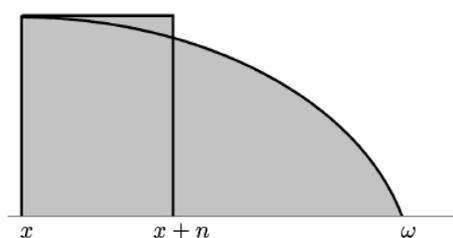
この場合、支払い確率は

$$\pi_k = \begin{cases} 1 & (0 \leq k \leq n-1) \\ {}_k p_x & (k \geq n) \end{cases}$$

で与えられる。よって、

$$\begin{aligned} \text{求める年金現価} &= EPV\{(1, k, \pi_k) \mid k = 0, 1, 2, \dots\} \\ &= EPV\{(1, k, 1) \mid 0 \leq k \leq n-1\} + EPV\{(1, k, {}_k p_x) \mid k \geq n\} \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}|} + {}_n|\ddot{a}_x. \end{aligned}$$

キャッシュフロー図：



問題. x と i が変化したとき, \ddot{a}_x はどう変化するか定性的に述べよ.

問題. r を年金開始年齢とする. $x < r$ に対し, $C_x^{UC} = r-x|\ddot{a}_x$ を(年齢 x における)単位積立保険料と呼ぶ. これは, r 歳から支払われる年金権の1単位を x 歳に積み立てるとしたときの保険料である. このとき, $C_x^{UC} < C_{x+1}^{UC}$ となることを示せ.

問題. 次の関係式を示せ. ここに, a_x は x 歳開始の期末払い終身生命年金現価を表わす.

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \ddot{a}_{x:\bar{n}|} + n|\ddot{a}_x, \\ \ddot{a}_x &= 1 + a_x.\end{aligned}$$

問題. 変額生命年金(期末払い)を

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} kv^k {}_k p_x$$

により定義する. このとき

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} k|a_x$$

を示せ. また, この現価は D_x を用いてどうかけるか.

問題. 次を示せ.

$$\frac{d}{dv} \ddot{a}_x = \frac{1}{v} (Ia)_x.$$

さらに, この結果を用いて $\frac{d}{di} \ddot{a}_x$ を求めよ.

3.2 いくつかの応用

(1) 年金化

x 歳で退職した個人が退職一時金を終身年金化することを考える(年金額はスライドされないものとする). 退職一時金を B とすると, 年金額 p は次のように計算される.

$$p \cdot \ddot{a}_x = B; \text{ よって } p = \frac{B}{\ddot{a}_x}.$$

(2) 加入年齢方式による保険料

加入年齢方式とは, 加入年齢(x)から退職年齢(r)まで平準保険料により年金給付費を積み立てる財政方式である. 保険料と給付費の期待現価が等しくなる条件より, 加入年齢方式の保

険料 C^{EAN} は次のように求められる。

$$C^{EAN} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r-x}|} = r-x|\ddot{a}_x; \quad \text{よって } C^{EAN} = \frac{r-x|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}}.$$

問題. C^{EAN} は x と r にどのように依存するか.

(3) 早期退職の減額率

正規の年金受給開始年齢を r 歳とする. これより n 歳早く退職する場合, 年金を受給し始める年齢は $r-n$ 歳である. 早期退職と正規退職の給付現価が等しくなるように早期退職の減額率を定める. w を年当たりの減額率とすると,

$$(1-w)^n \cdot \ddot{a}_{r-n} = {}_n|\ddot{a}_{r-n}; \quad \text{よって } w = 1 - \sqrt[n]{\frac{{}_n|\ddot{a}_{r-n}}{\ddot{a}_{r-n}}}.$$

問題. 生命表を用いて w を計算せよ. w の値は, ほぼ6%~9%の範囲である.

3.3 年1回以上支払われる生命年金

1年を m 期間(m は正の整数)に等分割し, x 歳から生存している限り, 各期初に $1/m$ 支払われる終身生命年金を考える. その年金現価は次で与えられる.

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_x = \frac{1}{ml_x} \sum_{k=0}^{\infty} l_{x+\frac{k}{m}} v^{\frac{k}{m}}.$$

生命表と予定利率が与えられたとき, この年金現価を計算する式を求めよう.

まず, 死亡の一樣分布を仮定すると, 生存関数は, 各歳において

$$l_{x+t+\frac{i}{m}} = l_{x+t} + \frac{i}{m}(l_{x+t+1} - l_{x+t}) = l_{x+t} - \frac{i}{m}d_{x+t}.$$

と線型近似される. これより,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{ml_x} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} l_{x+t+\frac{i}{m}} v^{t+\frac{i}{m}} = \frac{1}{ml_x} \sum_{t=0}^{\infty} v^t \left[\sum_{i=0}^{m-1} v^{\frac{i}{m}} \left(l_{x+t} - \frac{i}{m}d_{x+t} \right) \right] \\ &= \frac{1}{ml_x} \sum_{t=0}^{\infty} v^t \left[l_{x+t} \sum_{i=0}^{m-1} v^{\frac{i}{m}} - d_{x+t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{i}{m} v^{\frac{i}{m}} \right] = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t - \frac{1}{m} I\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^t \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} v^{\frac{i}{m}} \quad ; \quad I\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{i}{m} v^{\frac{i}{m}}$$

とおいた。上式により、 $\ddot{a}_x^{(m)}$ は（1歳間隔の）生命表と予定利率から、例えばExcelのような表計算ソフトで計算可能である。

ここでさらに、

$$\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} v^{\frac{i}{m}} \approx v^{\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{i}{m}} = v^{\frac{m-1}{2m}},$$

$$I\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{i}{m} v^{\frac{i}{m}} \approx \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{i}{m} \right) v^{\frac{1}{2}} = \frac{m-1}{2} v^{\frac{1}{2}}$$

なる近似をあえて行うならば、

$$\ddot{a}_x^{(m)} = v^{\frac{m-1}{2m}} \cdot \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \bar{A}_x$$

を得る。ここで、

$$\bar{A}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t} v^{t+\frac{1}{2}}$$

とおいた。この記号については3.9節を参照。

他方、

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m l_x} \sum_{k=0}^{\infty} l_{x+\frac{k}{m}} v^{\frac{k}{m}} = \frac{1}{m D_x} \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+\frac{k}{m}}$$

としてウールハウスの総和公式を用いると、

$$\frac{1}{m D_x} \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+\frac{k}{m}} = \frac{1}{D_x} \left[\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} - \frac{m-1}{2m} (D_x + D_{\infty}) - \frac{1}{12} \frac{m^2-1}{m^2} (D'_{\infty} - D'_x) + \dots \right]$$

となる。右辺の1次微分の項までで打ち切った式を上での $\ddot{a}_x^{(m)}$ の式に代入し、 $D'_x = -D_x(\mu_x + \rho)$ に注意すると、

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \rho)$$

を得る. ここで右辺第3項に現れる μ_x は, 2.9節で述べた方法により l_x 達から近似できる. さらに, 右辺第3項を切り上げれば, 次式を得る:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}.$$

問題. $D'_x = -D_x(\mu_x + \rho)$ を示せ.

以上は期初払いの場合であったが, 期末払いの年 m 回払い終身生命年金現価は,

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}$$

により求められる.

3.4 連続生命年金

連続生命年金は離散時間の生命年金の連続版である. その現価は次により与えられる.

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} {}_t p_x v^t dt = \frac{1}{D_x} \int_0^{\infty} D_{x+t} dt.$$

上式に

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \quad ; \quad v = e^{-\rho}$$

を代入すると,

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_0^t (\rho + \mu_{x+s}) ds\right) dt$$

を得る. ここでは, μ_x は連続変数としての年齢 x の関数として与えられているものとする.

一方, 連続生命年金とは分割払い生命年金の分割回数を無限大にしたものであると考えて, 次のように定義することもできる:

$$\bar{a}_x = \lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_x^{(m)}.$$

前項の結果を使うと、近似式

$$\bar{a}_x = v^{\frac{1}{2}} \cdot \ddot{a}_x - \frac{1}{2} \bar{A}_x,$$

または

$$\bar{a}_x = \ddot{a}_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \rho)$$

を得る.

問題. オイラー・マクローリンの総和公式を用いて、上に掲げた \bar{a}_x の2番目の近似式を導け.

例. ゴムパーツ-メーカムの法則: $\mu_x = A + Be^{\gamma x}$ の下で、 \bar{a}_x は次のようにかける:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_0^t (\rho + A + Be^{\gamma(x+s)}) ds\right) dt.$$

これより,

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial A} = \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \rho}$$

が従う.

問題. 上の関係はどのような意味を持つか. また、 \bar{a}_x は B や γ にどのように依存するか.

問題. ゴムパーツ-メーカムの法則: $\mu_x = A + Be^{\gamma x}$ の下で \bar{a}_x を計算せよ. [2.4節で求めたゴムパーツ-メーカムの法則の下での完全平均余命 e_x° の式において $A \rightarrow \rho + A$ とおきかえよ.]

3.5 完全生命年金とその精密化

(1) 完全生命年金

年金の支払い日と死亡時の間の差を考慮して、死亡時に年金額の一部が支払われる生命年金を考える. これは完全生命年金と呼ばれる. その支給条件は次の通りである.

- (i) 受給者が各 m 分期末に生存しているならば、年金 $1/m$ を支払う.
- (ii) 受給者の死亡時に、直近の支払い日から経過した時間に比例した額を支払う.

完全生命年金現価を a_x° という記号でかくことにすると、次が成り立つ:

$$a_x^\circ = a_x^{(m)} + r_x^{(m)}.$$

第1項は、年 m 回払いの（期末払）終身生命年金現価であり、既に3.3節で求めた。

第2項は、死亡した場合に支払われる給付の現価であり、次のように見積もられる。

$$r_x^{(m)} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^{\frac{1}{m}} \theta v^{t+\frac{i}{m}+\theta} l\left(x+t+\frac{i}{m}+\theta\right) \mu\left(x+t+\frac{i}{m}+\theta\right) d\theta.$$

各歳における死亡の一様分布の仮定の下で、右辺の総和記号のなかの

$$\theta \text{に関する積分} = d_{x+t} v^{t+\frac{i}{m}} \int_0^{\frac{1}{m}} \theta v^\theta d\theta = d_{x+t} v^{t+\frac{i}{m}} \bar{a}_{\frac{1}{m}|}.$$

よって

$$r_x^{(m)} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t} v^t \cdot \sum_{i=0}^{m-1} v^{\frac{i}{m}} \cdot \bar{a}_{\frac{1}{m}|} = m \ddot{a}_{\frac{1}{m}|}^{(m)} \cdot \bar{a}_{\frac{1}{m}|} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^t$$

となる。ここで、

$$\ddot{a}_{\frac{1}{m}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} v^{\frac{i}{m}},$$

$$\bar{a}_{\frac{1}{m}|} = \int_0^{\frac{1}{m}} \theta v^\theta d\theta = \int_0^{\frac{1}{m}} t e^{-\rho t} dt = \frac{1}{\rho^2} \left[1 - e^{-\frac{\rho}{m}} \left(1 + \frac{\rho}{m} \right) \right] \quad (\rho = -\log v)$$

である。上式により、 $r_x^{(m)}$ は生命表と予定利率から計算可能である。

問題. $\bar{a}_{\frac{1}{m}|}$ の計算に使われた次の不定積分を確かめよ（ C は積分定数）。

$$\int t e^{-\rho t} dt = -\frac{1}{\rho^2} e^{-\rho t} (\rho t + 1) + C.$$

さらにここで、3.3節で行ったと同様に、

$$\ddot{a}_{\frac{1}{m}|}^{(m)} \approx v^{\frac{m-1}{2m}},$$

$$\bar{a}_{\frac{1}{m}|} = \int_0^{\frac{1}{m}} \theta v^\theta d\theta \approx v^{\frac{1}{2m}} \int_0^{\frac{1}{m}} \theta d\theta = \frac{1}{2m^2} v^{\frac{1}{2m}}$$

なる近似をあえて行うならば,

$$r_x^{(m)} = \frac{1}{2m} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2m} \bar{A}_x$$

を得る.

他方, オイラー・マクローリンの総和公式を用いて, 以下のように $r_x^{(m)}$ の近似式を導くこともできる. そのために, 計算基数 \bar{M}_x を

$$\bar{M}_x = \int_0^{\infty} v^{x+t} l_{x+t} \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} D_{x+t} \mu_{x+t} dt$$

で定める. \bar{M}_x は

$$\frac{d\bar{M}_x}{dx} = -D_x \mu_x$$

を満たすことに注意すると,

$$r_x^{(m)} = -\frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^{\frac{1}{m}} \theta \left(\bar{M}_{x+t+\frac{i}{m}+\theta} \right)' d\theta.$$

とかける. ここで, 部分積分により, 右辺の総和記号のなかの

$$\theta \text{ に関する積分} = \left[\theta \bar{M}_{x+t+\frac{i}{m}+\theta} \right]_0^{\frac{1}{m}} - \int_0^{\frac{1}{m}} \bar{M}_{x+t+\frac{i}{m}+\theta} d\theta = \frac{1}{m} \bar{M}_{x+t+\frac{i+1}{m}} - \int_0^{\frac{1}{m}} \bar{M}_{x+t+\frac{i}{m}+\theta} d\theta.$$

よって,

$$r_x^{(m)} = -\frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{m} \bar{M}_{x+t+\frac{i+1}{m}} - \int_0^{\frac{1}{m}} \bar{M}_{x+t+\frac{i}{m}+\theta} d\theta \right) = \frac{1}{D_x} \left(\int_0^{\infty} \bar{M}_{x+t} dt - \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} \bar{M}_{x+\frac{t}{m}} \right)$$

となる. ここで, オイラー・マクローリンの総和公式を次の形で用いる.

$$\int_0^{\infty} \bar{M}_{x+t} dt = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \bar{M}_{x+\frac{t}{m}} dt = \frac{1}{m} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \bar{M}_{x+\frac{k}{m}} - \frac{1}{2} (\bar{M}_x + \bar{M}_{\infty}) - \frac{1}{12m} (\bar{M}'_{\infty} - \bar{M}'_x) + \dots \right].$$

上式右辺を 1 次微分の項までで打ち切った式を上 $r_x^{(m)}$ の式に代入すると, $\bar{M}'_x = -D_x \mu_x$ に注意して

$$r_x^{(m)} = \frac{1}{D_x} \left(\frac{1}{2m} \bar{M}_x + \frac{1}{12m^2} \bar{M}'_x \right) = \frac{1}{2m} \frac{\bar{M}_x}{D_x} - \frac{1}{12m^2} \mu_x$$

を得る。上式右辺の μ_x は、2.9節で述べた方法で l_x 達から近似できる。さらに、 \bar{M}_x を

$$\bar{M}_x = \int_0^{\infty} v^{x+t} l_{x+t} \mu_{x+t} dt \approx \sum_{t=0}^{\infty} v^{x+t+\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+1} l_{x+s} \mu_{x+s} ds \right) = \sum_{t=0}^{\infty} v^{x+t+\frac{1}{2}} d_{x+t}$$

と近似すれば、

$$r_x^{(m)} = \frac{1}{2m} \bar{A}_x - \frac{1}{12m^2} \mu_x$$

となる。

(2) 完全生命年金 — より一般的なケース

さらに年金支払いにおける運営上の制約を考慮し、次のような状況を考える。

(i') 年金の支払いは、例えば年6回払いの場合偶数月の末日といったように、暦の上で定められた日になされる。一般に、年金は月単位で年 m 回支払われるものとし、受給者が定められた支払い月の末に生存しているならば、年金 $1/m$ を支払う。ここでは、 m は12の約数であるとする。すなわち、 $mk = 12$ とおくと、年金は k カ月毎に支払われる。

(ii') 受給者が死亡した場合、直近の支払い日から死亡した日の属する月までの年金が次の支払い日に支払われる。

この生命年金の現価を $\tilde{a}_x^{(m)}$ という記号で表わすこととする。以下この値を計算するにあたっては、条件(i')に関して、受給者は支払い月の翌月の初めに年金開始年齢に達するものと仮定する（したがって、この受給者が生存して最初の $1/m$ の年金を受給するのは年金開始年齢に達した日から k カ月後の支払い日である）。したがって、

$$\tilde{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \tilde{r}_x^{(m)}$$

が成り立つ。上述の仮定により、生存している受給者に支払われる年金現価は、第1項の年 m 回払いの（期末払）終身生命年金現価に等しい。これは、既に3.3節で求めた。

一方、第2項の死亡した年金受給者に関する最終支払い額の現価は、次のように見積もられる。

$$\tilde{r}_x^{(m)} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{[12\theta]}{12} v^{t+\frac{i+1}{m}} l\left(x+t+\frac{i}{m}+\theta\right) \mu\left(x+t+\frac{i}{m}+\theta\right) d\theta.$$

ここで、 $[x]$ は x 以上の最小の整数を表す。

各歳における死亡の一様分布の仮定の下で、右辺の総和記号のなかの

$$\theta \text{ に関する積分} = d_{x+t} v^{t+\frac{i+1}{m}} \sum_{\lambda=1}^k \frac{\lambda}{12^2} = d_{x+t} v^{t+\frac{i+1}{m}} \frac{m+12}{24m^2}.$$

となる。よって

$$\tilde{r}_x^{(m)} = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t} v^t \cdot \sum_{i=0}^{m-1} v^{\frac{i+1}{m}} \cdot \frac{m+12}{24m^2} = \frac{m+12}{24m} \cdot a_{\overline{1}|}^{(m)} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^t$$

となる。ここで、

$$a_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v^{\frac{i}{m}}$$

とおいた。上式により、 $\tilde{r}_x^{(m)}$ は生命表と予定利率から計算可能である。

さらにここで、

$$a_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v^{\frac{i}{m}} \approx v^{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{i}{m}} = v^{\frac{m+1}{2m}}$$

なる近似をあえて行うならば、

$$\tilde{r}_x^{(m)} = \frac{m+12}{24m} \cdot v^{\frac{1}{2m}} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+\frac{1}{2}} = \frac{m+12}{24m} \cdot v^{\frac{1}{2m}} \cdot \bar{A}_x$$

を得る。

問題. 受給者が年金開始年齢に達するのが、必ずしも支払い月の翌月の初めとは限らない場合の $\tilde{a}_x^{(m)}$ の計算式を求めよ。この場合、条件(i')に関しては、生存している年金受給者の最初の支払い額は、年金開始年齢に達した月から初めての支払い月までの年金額（これは一般に k カ月分の年金額 $1/m$ より小さい）と修正する必要がある。また、条件(ii')に関しては、どのような修正が必要であるか。

3.6 生命年金現価のみたす漸化式と微分方程式

離散的な場合,

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

において、第1項をくり出し、第2項以下で ${}_k p_x$ を ${}_{k-1} p_{x+1} \cdot {}_1 p_x$ で置き換えることにより、次の漸化式（差分方程式）を得る。

$$\ddot{a}_x = 1 + v p_x \ddot{a}_{x+1}.$$

上式の意味は、次のように説明される。 \ddot{a}_x を期待現価とする確率的キャッシュフロー $\{(1, k, {}_k p_x) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ は、 $k = 0$ における1単位の年金支払いと $k \geq 1$ の確率的キャッシュフローから成る。上式は、このように二通りに表わした確率的キャッシュフローの期待現価が等しいことを意味している。

この漸化式を用いて、 \ddot{a}_x の値を最終年齢における条件： $\ddot{a}_\omega = 0$ から始めて、年齢が下がる向きに順次計算することができる。

連続的な場合,

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_0^t (\rho + \mu_{x+s}) ds\right) dt$$

を微分して、次の微分方程式を得る。

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = (\rho + \mu_x)\bar{a}_x - 1.$$

逆に、境界条件： $\bar{a}_\omega = 0$ の下で、上の \bar{a}_x に関する微分方程式を解くことにより、上記の \bar{a}_x の式が得られる。

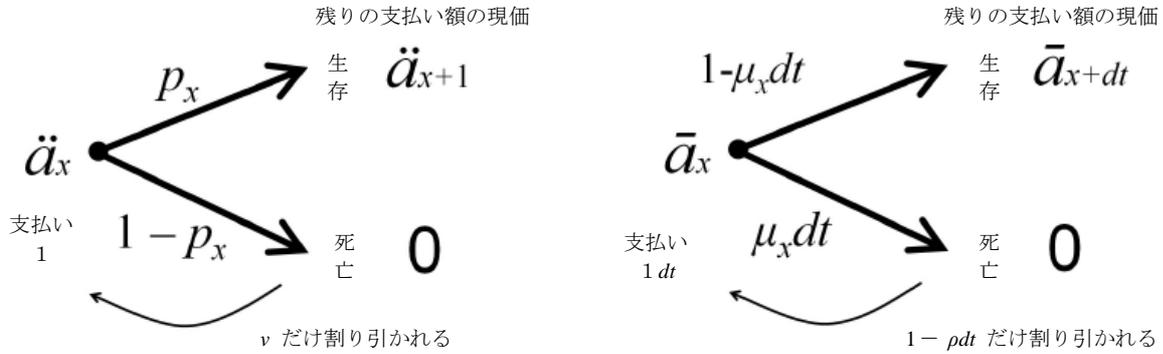
問題. 上の \bar{a}_x に関する微分方程式を解け。

なお、生命年金現価のみたす漸化式と微分方程式は、以下のように遷移図を考えることによっても導くことができる。

離散的な場合、図3.1（左）より、 x 歳の者が、 $x+1$ 歳に生存している場合（確率 p_x ）その生命年金現価は \ddot{a}_{x+1} 、また $x+1$ 歳までに死亡した場合（確率 $1-p_x$ ）その生命年金現価は0である。したがって、 x 歳における生命年金現価は、これらの期待値を $x+1$ 歳から x 歳までの1年間分割り引いた額と、 x 歳で支払われる1単位の年金の和である。よって、次の等式を得る。

$$\ddot{a}_x = 1 + v[p_x \cdot \ddot{a}_{x+1} + (1 - p_x) \cdot 0] = 1 + v p_x \ddot{a}_{x+1}.$$

図 3.1 生命年金現価の満たす漸化式と微分方程式の遷移図による導出



問題. 同様な考えで, 図 3.1 (右) から, 連続的な生命年金現価の満たす微分方程式を導け.

3.7 確率論的アプローチ

本節では連続生命年金を扱うが, 基本的な結果は離散的な場合にも読み換えられる. まず,

$$\frac{d}{dt} \bar{a}_{\bar{t}|} = e^{-\rho t} \quad ; \quad \frac{d}{dt} {}_t p_x = -{}_t p_x \mu_{x+t}$$

に注意すれば, 部分積分により,

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} {}_t p_x dt = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \quad (*)$$

を得る.

(*) 式の右辺は,

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} d\Phi(t|x) = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} \Pr(t < T_x \leq t + dt)$$

と表わすことができる. ここに, $\Phi(t|x) = \Pr(T_x \leq t)$ である (2.5 節参照).

また, 上の関係式は, $Y = \bar{a}_{\bar{T}_x|} = \rho^{-1}(1 - e^{-\rho T_x})$ という確率変数を導入すれば,

$$\bar{a}_x = E[Y] = E[\bar{a}_{\bar{T}_x|}]$$

と表わされる。

確率変数 Y に関連する他の基本量は以下のように計算できる。

まず、 Y の分布関数は、変数変換によって次のように得られる。

$$F(y) = \Phi\left(-\frac{1}{\rho}\log(1-\rho y) \mid x\right) = \frac{l\left(x - \frac{1}{\rho}\log(1-\rho y)\right)}{l(x)}.$$

これより、 Y の確率密度関数は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} f(y) &= F'(y) = \Phi'\left(-\frac{1}{\rho}\log(1-\rho y) \mid x\right) \cdot \frac{1}{1-\rho y} \\ &= \frac{l\left(x - \frac{1}{\rho}\log(1-\rho y)\right) \mu\left(x - \frac{1}{\rho}\log(1-\rho y)\right)}{l(x)} \cdot \frac{1}{1-\rho y}. \end{aligned}$$

次に、 Y の分散を求める。それには次の関係を用いる。

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = E[Y^2] - (\bar{a}_x)^2.$$

いま、

$$Y(t, \rho) = \bar{a}_{\overline{t}|}(\rho) = \int_0^t e^{-\rho s} ds = \frac{1}{\rho}(1 - e^{-\rho t})$$

とおくと、

$$(Y(t, \rho))^2 = \frac{1}{\rho^2}(1 - 2e^{-\rho t} + e^{-2\rho t}) = \frac{2}{\rho}\left(\frac{1 - e^{-\rho t}}{\rho} - \frac{1 - e^{-2\rho t}}{2\rho}\right) = \frac{2}{\rho}(Y(t, \rho) - Y(t, 2\rho))$$

だから、

$$E[Y^2] = \frac{2}{\rho}(\bar{a}_x - \overline{{}^2}\bar{a}_x).$$

ここで、 $\overline{{}^2}\bar{a}_x$ は利力を2倍とした生命年金現価を表わす。よって、

$$\text{Var}[Y] = \frac{2}{\rho}(\bar{a}_x - \overline{{}^2}\bar{a}_x) - (\bar{a}_x)^2$$

を得る。

問題. 死力一定 = μ , かつ, 利力一定 = ρ の仮定の下で, 次の量を求めよ.

$$\bar{a}_x = E[Y] ; \text{Var}[Y] ; \Pr(Y > \bar{a}_x).$$

さらに, ゴムパーツ-メーカムの法則の下でこれらの量を計算せよ.

一方, (*)式の中辺は次のようにかける.

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} {}_t p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \tilde{\Phi}(t|x) dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \Pr(T_x > t) dt.$$

ここに, $\tilde{\Phi}(t|x) = 1 - \Phi(t|x) = \Pr(T_x > t)$ は, 確率変数 T_x の生存関数である (2.5 節参照).

この関係式は,

$$\bar{a}_x = PV[\tilde{\Phi}(t|x)] = PV[\Pr(T_x > t)]$$

とかける.

以上より, \bar{a}_x を二通りの見方で表わす(*)式は,

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \Pr(T_x > t) dt = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} \Pr(t < T_x \leq t + dt),$$

あるいは, 簡潔に,

$$\bar{a}_x = PV[\Pr(T_x > t)] = E[\bar{a}_{\bar{T}_x|}]$$

と表わすことができる.

さらに, 確率過程を用いたアプローチでは, 確率変数 T_x に対して,

$$\Lambda^{(x)}(t) = H(T_x - t) = \begin{cases} 1 & (T_x > t \text{ のとき}) \\ 0 & (T_x \leq t \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義される確率過程 $\{\Lambda^{(x)}(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ を考えた (2.6 節参照). すると,

$$\Pr(T_x > t) = \Pr(\Lambda^{(x)}(t) = 1),$$

$$\bar{a}_{\bar{T}_x|} = PV[\Lambda^{(x)}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \Lambda^{(x)}(t) dt$$

に注意すれば, (*)式は

$$\bar{a}_x = PV[\Pr(\Lambda^{(x)}(t) = 1)] = E[PV[\Lambda^{(x)}(t)]]$$

と表わすことができる.

問題. 確率過程 $\{X(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ により与えられる確率的キャッシュフローを考える. さらに, 利力も確率過程 $\{\rho(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ に従うとする. 任意の t と s について $X(t)$ と $\rho(s)$ は独立であると仮定する. 確率変数 PV_X を

$$PV_X = \int_0^{\infty} X(t) \exp\left(-\int_0^t \rho(s) ds\right) dt$$

により定義するとき, PV_X に関する基本量 (例えば期待値や確率密度関数等) はどのように計算されるか. さらに, $X(t)$ と $\rho(s)$ との間に相関がある場合にはどうなるか.

問題. 離散的な場合についても, 上と同様に, 関係式

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k}|} \cdot q_{x+k} \cdot {}_k p_x$$

を確率変数 $K_x = [T_x]$ ($[x]$ は x を超えない最大の整数を表わす) を用いて二通りに表わせ.

3.8 生命年金現価と確定年金現価の間の不等式

生命年金現価 \bar{a}_x を, 確定年金現価 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ において支払い期間 $n = e_x^\circ$ としたもので近似するのはそれほど的是はずれではない. しかし, 厳密にはこれら二つの値は異なる. 実際, 次の不等式が成り立つ:

$$\bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{e_x^\circ}|}$$

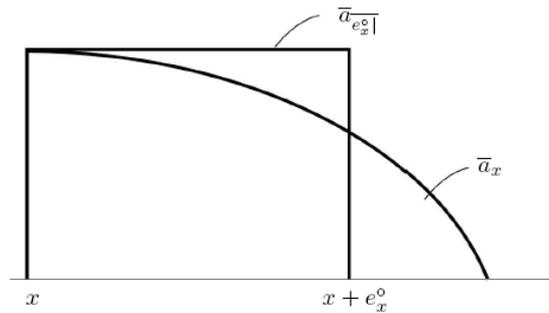
この不等式は, イェンセンの不等式: 「確率変数 X と狭義凹関数 $f(t)$ に対して $E[f(X)] < f(E[X])$ が成り立つ」を用いて示すことができる.

問題. 上の不等式の証明を完結せよ. [$X = T_x$ と $f(t) = \bar{a}_{\overline{t}|}$ について, イェンセンの不等式を適用せよ. $f''(t) < 0$ を示せ.]

¹ $f(x)$ が狭義凹関数であるとは, 任意の x, y と $t \in (0, 1)$ に対し $(1-t)f(x) + tf(y) < f((1-t)x + ty)$ が成り立つことをいう.

一方、この結果は、グラフを見れば明らかであろう（図3.2において、面積の等しい二領域に対応する年金額は右側の方が左側より多く割り引かれる）。また、図より、 $\bar{a}_{\overline{e_x^\circ}|}$ と \bar{a}_x の差が小さくなるのは、死亡率が平均余命の近傍でのみ急激に上昇するような場合であることがわかる。

図3.2 生命年金と平均余命と確定年金の関係



3.9 生命保険（死亡一時金）

生命保険（死亡一時金）は、被保険者(保険加入年齢 x)が死亡した時、1単位の保険金を（期末に）支払う契約である。

離散時間の場合、終身生命保険の現価は、

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} v^{k+1} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} d_{x+k} v^{k+1}.$$

となる。また、 A_x は、被保険者が $(x+k, x+k+1]$ の範囲の年齢で死亡する確率を支払い確率とする確率的キャッシュフローの期待原価とみることができる：

$$A_x = EPV\{(1, k+1, {}_k p_x \cdot q_{x+k}) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

問題. 次の関係式を示せ.

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x = 1 - (1-v)\ddot{a}_x.$$

連続時間の場合、終身生命保険の現価は次のように計算される。

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \frac{1}{D_x} \int_0^{\infty} D_{x+t} \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} \mu_{x+t} \exp\left(-\int_0^t (\rho + \mu_{x+s}) ds\right) dt.$$

次の関係式が成り立つことに注意せよ。

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} d\Phi(t|x) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \Pr(t \leq T_x \leq t + dt).$$

これは、 $Z = e^{-\rho T_x}$ と定義される確率変数に対し、

$$\bar{A}_x = E[Z] = E[e^{-\rho T_x}]$$

であることを意味する。なお、

$$\bar{A}_x = E[e^{-\rho T_x}] = PV[\phi(t|x)]$$

が成り立つことに注意。ここで、 $\phi(t|x)$ は T_x の確率密度関数である。

問題. Z の分布関数と確率密度関数を求めよ。

問題. Z は、3.7節で考えた確率過程 $\{\Lambda^{(x)}(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ を用いて

$$Z = PV \left[-\frac{\partial}{\partial t} \Lambda^{(x)}(t) \right]$$

と表わされることを確かめよ。ここに、 $-\frac{\partial}{\partial t} \Lambda^{(x)}(t) = \delta(t - T_x)$ ($\delta(t)$ はデルタ関数)。

問題. \bar{A}_x は次の微分方程式を満たすことを示せ。また、この式の意味を述べよ。

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = (\rho + \mu_x)\bar{A}_x - \mu_x.$$

さて、3.7節で定義した $Y = \bar{a}_{\overline{T_x}|} = \rho^{-1}(1 - e^{-\rho T_x})$ と上で定義した $Z = e^{-\rho T_x}$ との間には、

$$\rho Y + Z = 1$$

という関係がある。この期待値をとれば次の関係式が成り立つ。

$$\rho \bar{a}_x + \bar{A}_x = 1.$$

問題. 上の関係式を定義式から部分積分を用いて示せ。また、次を示せ。

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = \mu_x \bar{a}_x - \bar{A}_x.$$

生命表を用いて \bar{A}_x を近似する式は以下の通り：

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} v^t l_{x+t} \mu_{x+t} dt = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\infty} \int_t^{t+1} v^s l_{x+s} \mu_{x+s} ds \\ &\approx \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+\frac{1}{2}} \int_t^{t+1} l_{x+s} \mu_{x+s} ds = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t} v^{t+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

3.A 連生年金（特に遺族年金）

本章では、受給者が一人である単生年金のみを考えたが、受給者が複数となる連生年金を考える必要が生ずることがある。ここでは、典型例として、一組の夫婦から成る世帯（夫をX、妻をYで表わす）に支払われる年金について補足する。

連生年金を定義するには、生存モデルを複数の個人の生存状態に拡張する必要がある。 $t=0$ の時点におけるXの年齢を x 歳、Yの年齢を y 歳とする。2.6節でみたように、XとYのそれぞれに関して、時点 $t \geq 0$ において生存していれば1、死亡していれば0の値をとる確率過程が考えられる（XとYは異なる死亡法則に従うことに注意せよ）。それらを $\Lambda_X^{(x)}(t)$ 、 $\Lambda_Y^{(y)}(t)$ ($t \geq 0$)と表わす。 $\Lambda_X^{(x)}(t)$ と $\Lambda_Y^{(y)}(t)$ は独立であると仮定すると

$$\Pr\left(\Lambda_X^{(x)}(t) = i \cap \Lambda_Y^{(y)}(t) = j\right) = \Pr\left(\Lambda_X^{(x)}(t) = i\right) \cdot \Pr\left(\Lambda_Y^{(y)}(t) = j\right), \quad i, j \in \{0,1\}$$

が成り立つ。この値を $W_t(i, j)$ と表わすと、時点 $t \geq 0$ において

- (i) XもYも共に生存している確率 : ${}_t p_{xy} = W_t(1,1) = {}_t p_x \cdot {}_t p_y$ ¹
- (ii) Xは死亡しYが生存している確率 : ${}_t p_{x|y} = W_t(0,1) = {}_t p_y - {}_t p_{xy}$
- (iii) Xは生存しYが死亡している確率 : ${}_t p_{y|x} = W_t(1,0) = {}_t p_x - {}_t p_{xy}$

となる。これらの生存確率に基づく（期初払い）生命年金現価を \ddot{a}_{xy} 、 $\ddot{a}_{x|y}$ 、 $\ddot{a}_{y|x}$ と表わす。次の関係式が成り立つことに注意。

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy} \quad ; \quad \ddot{a}_{y|x} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}.$$

これらを用いて以下では二通りの年金現価を求める。

第一に、夫に1単位の老齢年金を支払い、夫が死亡した場合、その妻に α ($0 < \alpha \leq 1$)の割合を遺族年金として終身支払う場合の老齢年金と遺族年金の現価を $A(\alpha)$ とかくと、

$$A(\alpha) = \ddot{a}_x + \alpha \ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_x + \alpha \ddot{a}_y - \alpha \ddot{a}_{xy}$$

¹ 通例の記法に従ったが、一般に、 ${}_t p_x$ と ${}_t p_y$ は異なる死亡法則に従う生存確率であることに注意。

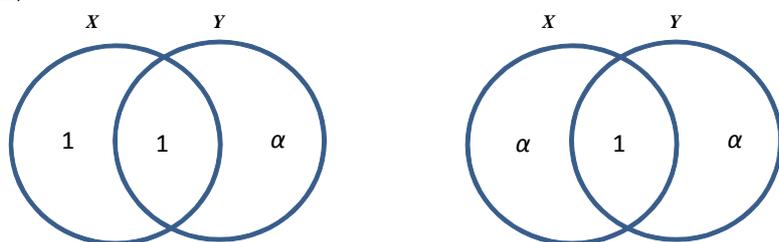
を得る. 図 3.3 (左) 参照. なお, 世帯に支払われる年金には妻の老齢年金を別途考慮する必要がある.

第二に, 夫婦では 1 単位, 単身になった場合 α ($0 < \alpha \leq 1$) を終身支払う老齢年金の現価を $B(\alpha)$ とかくと,

$$B(\alpha) = \ddot{a}_{xy} + \alpha(\ddot{a}_{x|y} + \ddot{a}_{y|x}) = \alpha\ddot{a}_x + \alpha\ddot{a}_y + (1 - 2\alpha)\ddot{a}_{xy}$$

を得る. 図 3.3 (右) 参照.

図 3.3



注意. 子供に支払われる遺族年金(遺児年金)も同様の扱いが可能である. ただし, 遺児年金は, 受給者が二人以上の場合もあり得る(その場合, 最年少の子供に着目すればよい), また, 受給者が成人したり学校教育を終えた時点で給付が終了することから年金の支払いは有期である(受給者が障害を持っているような場合には継続して支給される), といった点を考慮する必要がある.

3.B 数学公式補遺¹

本節では, 本章で証明なしに用いた数学公式のうち,

- (i) 生命表の生存関数 l_x から死力 μ_x を近似する際に用いた数値微分法の公式;
- (ii) 連続生命年金現価や完全生命年金現価の近似式を導くときに用いたオイラー-マクローリン(Euler-Maclaurin)の総和公式; および,
- (iii) 年 m 回分割払いの生命年金現価の近似式を導くときに用いたウールハウス(Woolhouse)の総和公式

について補足する. これらの公式は, テイラー展開とニュートンの前進差分公式の, 微分ならびに差分演算子による形式的な表現を適用することにより, 簡潔に表すことができる.

なお, (ii), (iii)に関しては, これらの公式を使わずとも, 死亡の一樣分布の仮定を用いることにより, 生命表から計算可能な年金現価の近似式を導くことができることを注意しておく.

¹ 本節は[Hirose1] Chap 10.に基づく.

以下考える関数 $f(x)$ は実数上において無限回連続微分可能とする.

(1) テイラー展開とニュートンの前進差分公式

関数 $f(x)$ の $x = a$ における最初の n 項までとったテイラー展開は次で与えられる:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x).$$

ここに, 剰余項は

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

であり, $|x-a| < r$ において

$$|R_n(x)| \leq \|f^{(n)}\|_{\infty} \int_a^x \left| \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right| dt \leq \|f^{(n)}\|_{\infty} \frac{r^n}{n!}$$

と評価される (ここで $\|\cdot\|_{\infty}$ は sup ノルム). 以下この項では, $f(x)$ は各点の近傍で剰余項が n が無限大の極限で 0 になる, すなわち実解析的と仮定する.

テイラー展開を用いると, 実解析関数 $f(x)$ の引数 x を有限な h だけずらしたものは形式的に

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k = e^{hD} f(x)$$

とかける. ここに, D は微分演算子 $D = \frac{d}{dx}$ である.

一方, 次数 n の多項式 $p(x)$ に関するニュートンの前進差分公式は

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \binom{x-a}{k} \Delta^k p(a)$$

とかける. ここに Δ は前進差分 $\Delta p(x) = p(x+1) - p(x)$ である.

これは二項定理を使って形式的に

$$p(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{h}{k} \Delta^k p(x) = (1+\Delta)^h p(x)$$

とかくことができる ($\Delta^k p(x) = 0, k > n$ に注意) .

ここで

$$\Delta^{(m)} f(x) = m[f(x + 1/m) - f(x)] = m[(1 + \Delta)^{1/m} - 1]f(x)$$

と定義すると, $\Delta^{(1)} f(x) = \Delta f(x)$ かつ $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta^{(m)} f(x) = f'(x)$ であり, 上の結果は

$$e^D = 1 + \Delta = \left(1 + \frac{\Delta^{(m)}}{m}\right)^m$$

と簡潔な形に表わされる.

なお, 上の関係式と, 利力, 利率, 年 m 回転化の名称利率の間に成り立つ関係式

$$e^\delta = 1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

との形式上の類似に注意しておく.

一方, 上に述べた $e^D = 1 + \Delta$ を D に関して形式的に解くと,

$$D = \log(1 + \Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 \dots$$

となるが, 右辺は多項式に作用する演算子として定まり, その結果は多項式の微分に一致する. この関係式を利用して微分を高階差分で表わすことができる. データの対称性をいかすには, スターリング(Stirling)の補間公式¹を微分することによって得られる,

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k!)^2}{(2k+1)!} \mu \delta^{2k+1}$$

を用いればよい. ここに, $\mu f(t) = \frac{1}{2}[f(t + \frac{1}{2}) + f(t - \frac{1}{2})]$ (中心平均), $\delta f(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t - \frac{1}{2})$ (中心差分) である. 上式の初項だけをとれば3点近似公式が, 最初の2項をとれば5点近似公式が得られる.

¹ スターリングの補間公式は次の通り:

$$p_s(x) = p(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^o(x) \mu \delta^{2k+1} p(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^e(x) \delta^{2k} p(0).$$

ここに, $\mu p(t) = \frac{1}{2}[p(t + \frac{1}{2}) + p(t - \frac{1}{2})]$; $\delta p(t) = p(t + \frac{1}{2}) - p(t - \frac{1}{2})$, かつ,

$$\phi_k^o(x) = \binom{x+k}{2k+1} = \frac{x(x^2-1)\dots(x^2-k^2)}{(2k+1)!} \quad ; \quad \phi_k^e(x) = \frac{x}{2k} \binom{x+k-1}{2k-1} = \frac{x^2(x^2-1)\dots(x^2-(k-1)^2)}{(2k)!}.$$

この公式の証明については, [Hirose1] Chap 10.を参照されたい. 数値微分法の公式を導くには, ある関数 $f(x)$ の $x = t + k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) における値が与えられたとして, $p(x) = f(t+x)$ に上記スターリングの補間公式を適用し, $f'(t)$ を $p'_s(0)$ で近似せよ.

(2) オイラー - マクローリンの総和公式とウールハウスの総和公式

区間 $[M, N]$ ($N-M$ は正の整数)において, 関数 $f(x)$ に関する $n-1$ 階微分までとったオイラー - マクローリンの総和公式は次で与えられる:

$$\sum_{k=M}^{N-1} f(k) = \int_M^N f(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=M}^N + T_n.$$

ここに, 剰余項は

$$T_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_M^N \tilde{B}_n(x) f^{(n)}(x) dx.$$

なお, 上式に現れるベルヌーイ数 B_n は次の母関数で定められる:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n.$$

最初のいくつかのベルヌーイ数は,

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}$$

等々である. また剰余項の被積分関数に現れる $\tilde{B}_n(x)$ とは, ベルヌーイ多項式 $B_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$ の区間 $[0, 1]$ での値を周期的に延長したもの, すなわち $\tilde{B}_n(x) = B_n(x - [x])$ (ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表わす) である.

オイラー - マクローリンの総和公式の剰余項を上から評価すると,

$$|T_n| \leq \frac{1}{n!} \max_{0 \leq x \leq 1} |B_n(x)| \int_M^N |f^{(n)}(x)| dx \leq \frac{K}{(2\pi)^n} \|f^{(n)}\|_1 \quad (K \text{ は正の定数})$$

となる (ここで $\|\cdot\|_1$ は L_1 ノルム). 以下この項では, 考えている区間において上の不等式の最右辺は n が無限大の極限で 0 になると仮定する. このとき, 前項の注意からこの区間の内部で $f(x)$ は実解析的であることに注意.

オイラー - マクローリンの総和公式は, ベルヌーイ数の母関数に形式的に微分演算子を代入して

$$\Delta^{-1}f(k)|_{k=M}^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_{x=M}^N = \frac{1}{e^D - 1} f(x) \Big|_{x=M}^N$$

と表わされる. ここで $\Delta^{-1}f(k) = \sum_{i < k} f(i)$, また, $D^{-1}f(x)$ は $f(x)$ の原始関数の意味と約束する. この式は, より簡潔に,

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{e^D - 1}$$

とかける. これは, $e^D = 1 + \Delta$ を Δ^{-1} に関して解いた形になっていることに注意.

ウールハウスの総和公式は,

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mn} f\left(a + \frac{k}{m}\right) = \sum_{k=0}^n f(a+k) - \frac{m-1}{2m} [f(a) + f(a+k)] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{m^{2k}-1}{m^{2k}} f^{(2k-1)}(a+x) \Big|_{x=0}^n$$

とかける. これは次のように書き換えられる.

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mn-1} f\left(a + \frac{k}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(a+x) \Big|_{x=0}^n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{m^k} f^{(k-1)}(a+x) \Big|_{x=0}^n.$$

これを演算子形式で簡潔にかくと

$$(\Delta^{(m)})^{-1} = \Delta^{-1} - \frac{1}{e^D - 1} + \frac{1}{m} \frac{1}{e^{D/m} - 1}$$

となり, 先に掲げた同様の式と形式上整合的である.

ウールハウスの総和公式はオイラー - マクローリンの総和公式から導かれる. 一方, ウールハウスの総和公式において m を無限大にした極限をとると, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mn} f\left(a + \frac{k}{m}\right) = \int_0^n f(a+x) dx$ に注意すれば, オイラー - マクローリンの総和公式が再び得られる.

第4章 公的年金の財政分析の方法

本章では、まず公的年金に関する三つの財政指標を定義し、それらの意味と用途について調べる。次いで年金財政が長期的に健全に維持されるための条件と保険料率の長期的な設定方法について説明する。保険料率の設定にあたって要請される条件は、先進国の例にみるように、多くの場合財政指標を用いて述べることができる。そこで本章の後半では、財政指標に関する条件を満たすような保険料率の一般的な設定方法について詳しく解説する。

4.1 公的年金制度の財政指標とそれらの意味

被保険者が拠出する保険料と積立金の運用収入（国庫負担がある場合もあるが、ここでは考慮しない）を財源とする、給付建ての年金制度を考えよう。この年金制度の収入・支出の各項目の間には、次の関係式が成り立つ（図4.1参照）。

$$R(t) = C(t) + I(t), \quad (4.1)$$

$$C(t) = p(t) \cdot S(t), \quad (4.2)$$

$$\Delta F(t) = F(t) - F(t-1) = R(t) - B(t), \quad (4.3)$$

$$I(t) = (\sqrt{1+i(t)} - 1)(C(t) - B(t)) + i(t)F(t-1). \quad (4.4)$$

ここで、

$R(t)$: t 年における総収入

$C(t)$: t 年における保険料収入

$p(t)$: t 年における保険料率

$S(t)$: t 年における拠出対象所得総額

$I(t)$: t 年における運用収入

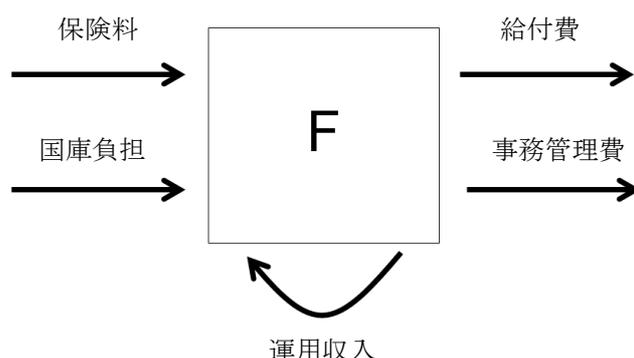
$B(t)$: t 年における総支出（支出は給付費のみからなるとする）

$F(t)$: t 年末における積立金

$i(t)$: t 年における積立金の運用利回り

である。

図4.1 公的年金制度の収支構造



一つの制度の財政状態の時系列の変遷を記述する場合や、規模の異なる複数の制度の財政状態を比較する場合には、収入や支出の名目額を扱うよりも、正規化された財政指標を用いた方がみやすい。以下では、賦課費用率、積立比率、収支比率と呼ばれる三つの財政指標を定義する。

第一に、 t 年における賦課費用率 (pay-as-you-go cost rate) — または年金費用率 (pension cost rate) — は、次の通り定義される：

$$C^{PAYG}(t) = \frac{B(t)}{S(t)} .$$

これは、ある年の年金給付費がその年の保険料により賄われるとした場合に必要な保険料率に等しい。さらに、賦課費用率は次の二要素の積に分解される：

$$C^{PAYG}(t) = d(t) \cdot \theta(t) .$$

ここで $d(t)$ は年金制度扶養指数 (system dependency ratio) — 成熟度とも呼ばれる — であり、年金者人口の現役拠出者人口に対する比率として定義される。また、 $\theta(t)$ は平均所得代替率 (system replacement ratio) であり、平均年金額の平均拠出対象所得に対する比率として定義される。上の関係は、年金者一人を支える現役拠出者の数が少ないほど、また、平均拠出対象所得対比でみた平均年金額の水準が高いほど、賦課費用率は高くなることを意味する。したがって、平均所得代替率が大きく変動しないならば、急速な人口構造高齢化は、年金制度扶養指数 (成熟度) の上昇を通じて、賦課費用率 (年金費用率) の急速な上昇を引き起こすことが予測される。

第二に、 t 年における積立比率 (funding ratio; reserve ratio) は、次の通り定義される：

$$a(t) = \frac{F(t-1)}{B(t)} .$$

積立比率は、年金制度が t 年初において保有している積立金がその年の支出の何年分に相当するかを測る指標である。この指標は積立金の相対的規模を表わす。

第三に、 t 年における収支比率 (balance ratio) は、次の通り定義される：

$$b(t) = \frac{B(t) - C(t)}{I(t)} .$$

収支比率は、支出と保険料との差 (保険料収入を上回る支出額) の運用収入に対する比率を表す。この指標の意味を明確化するため、保険料収入は現金と等価であるのに対し、運用収入の流動性は一般に資産の種類によることに注意する必要がある。したがって、収支比率は、保険料が支出に不足する場合、その不足分をカバーするために現金化する必要がある運用収入の割合を表す。なお、積立金を取り崩して支出にあてることも可能であるが、一般に、長

期運用している資産を流動化するためには特別な配慮が必要である（なお、4.5節(3)5° 参照）。

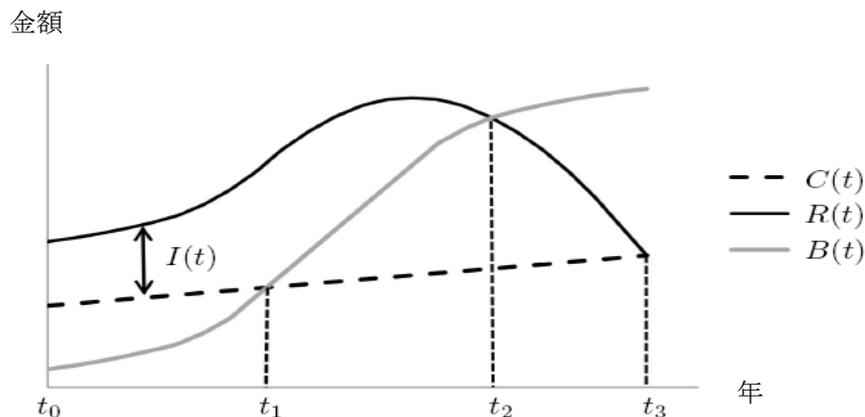
なお、 t 年におけるキャッシュフローを $D(t) = C(t) - B(t)$ と定めると、当該年における収支比率は、次のようにかける：

$$b(t) = -\frac{D(t)}{I(t)}.$$

したがって、キャッシュフローが正のとき収支比率は負の値をとり、逆にキャッシュフローが負のとき収支比率は正の値をとることに注意。

収支比率は、年金制度の異なる財政状態の様相を特徴付ける。当初は支出（給付費）が小さいが制度の成熟化に伴い徐々に増加し最終的には保険料収入を上回る仮想的な年金制度を考える¹。この制度の発足時点を t_0 年とする。第Ⅰ段階では、支出を賄うのに十分な保険料があり、収支比率は負の値をとる。保険料収入がちょうど支出と一致する時点を t_1 年とする。第Ⅱ段階では、保険料収入のみでは支出を賄うのに十分ではないが運用収入の一部を支出に充てることにより収支は依然黒字である。このとき、収支比率は0と1の間の値をとる。収支がゼロとなる時点を t_2 年とする。最後に、第Ⅲ段階では、総収入が支出を下回り、赤字分は積立金の取り崩しにより賄われる。この場合、収支比率は1より大きい。ここで何の対策もたなければ、最終的に積立金は枯渇するに至る²。その時点を t_3 年とする。

図4.2 仮想的な年金制度の収支見通し



以上を要約すると、次の表のようになる。

¹ すべての公的年金制度がこのような段階を経るわけではないことに注意する必要がある。

² 実際、1990年から2010年代にかけて、中東欧の移行経済国における賦課方式の公的年金制度では、保険料が支出に不足し、赤字分の補填を国家予算に頼っている。

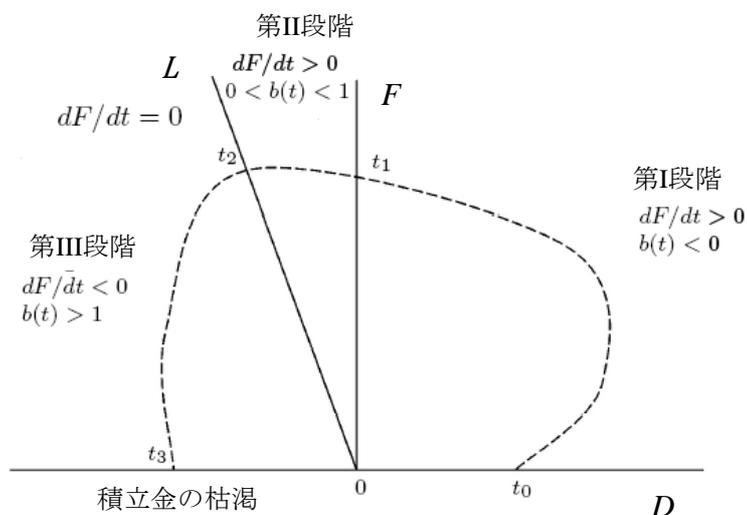
表 4.1 収支比率と財政状態の関係

期間	収支比率	収支状況	キャッシュフロー	積立金	財政状況
(t_0, t_1)	$b(t) < 0$	$B(t) < C(t)$	正	増加	保険料は支出を上回り，運用収入を流動化する必要はない。
t_1	$b(t) = 0$	$B(t) = C(t)$	ゼロ	増加	保険料は支出に等しい。
(t_1, t_2)	$0 < b(t) < 1$	$C(t) < B(t) < R(t)$	負	増加	保険料は支出より小さいが，運用収入を含めると収支は正(黒字)。
t_2	$b(t) = 1$	$B(t) = R(t)$	負	極値	保険料と運用収入は支出に等しい。収支はゼロである。
(t_2, t_3)	$b(t) > 1$	$B(t) > R(t)$ ($\Delta F(t) < 0$)	負	減少	総収入は支出に不足。収支は負(赤字)で，積立金は減少する。

一方，キャッシュフローと積立金の関係は，位相図を用いて記述することもできる。積立金の運用利回り i は時間によらず一定と仮定すると，本節の最初に掲げた(4.3)式と(4.4)式より，積立金の時間発展を記述する次の差分方程式が得られる：

$$\Delta F(t) = \sqrt{1+i} D(t) + i F(t).$$

図 4.3 仮想的な年金制度における積立金の時間発展の位相図



$D - F$ 平面の上半分の領域の各点は，年金制度の財政状態を表すと考えられる。図の曲線は

上述の仮想的な年金制度の財政状態の時間発展を表す。図からわかるように、上半平面は、収支比率の値によって三つの領域に分割される。第Ⅰ段階は D と F の双方が正である第1象限に対応する。第Ⅱ段階は縦軸と右下がりの直線 L との間の領域に対応する。ここで、直線 L はそこで積立金が極値をとる（すなわち、 $\Delta F(t) = 0$ である）点の全体であり、

$$F = -\frac{\sqrt{1+i}}{i} D$$

で与えられる。第Ⅲ段階は上半平面で直線 L より左側の領域に対応する。

4.2 長期的収支均衡の条件と流動性確保の条件

財政的観点から年金制度の健全性を評価するためには、二つの条件が考慮されるべきである。一つは、長期的な収支均衡（ソルベンシー）の条件であり、もう一つは給付支払いが円滑に行われるための収入における流動性確保の条件である。

第一に、年金制度の長期的収支均衡の条件は、次のように定式化される。

$$PV[C(t)] + F_0 = PV[B(t)].$$

ここで $C(t)$ は将来保険料収入の推計値、 F_0 は再計算基準時点（ t_0 年初）において保有する積立金、 $B(t)$ は将来給付費の推計値である。 $PV[\cdot]$ は現価を意味する。なお、上に述べた長期的収支均衡の条件は、次の条件と同値であることに注意せよ：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v^t F(t) = 0.$$

ここで v は割引率である。なお、この条件は、有限均衡期間 $[t_0, T]$ の場合には最終年度末の積立金がゼロになる、すなわち $F(T) = 0$ という条件と同値である。

年金制度の長期的収支均衡の条件を検証するためには、以下に示す数理的バランスシート（数理的貸借対照表）がしばしば用いられる。

表 4.2 年金制度の数理的バランスシート

資産	負債
- 積立金: F_0	- 給付現価: $PV[B(t)] = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{B(t)}{(1+i)^t}$
- 保険料現価: $PV[C(t)] = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C(t)}{(1+i)^t}$	- 数理的収支: $F_0 + PV[B(t)] - PV[C(t)]$

数理的バランスシートは、再計算基準時点における積立金と将来の保険料現価の合計を将来の給付現価と比較するものである。数理的バランスシートにおいて、資産から負債を差し引いた額は、「数理的収支」(actuarial balance)と呼ばれる。数理的収支が負の場合、その絶対値は「未積立年金債務」(または「年金に関する潜在的超過債務」)と呼ばれる。

保険料現価と給付現価の評価には、債務の範囲に関していくつかの基準があることを注意しておく。一つは既発生債務基準または「制度終了」基準と呼ばれるもので、仮に再計算の基準時点で制度を打ち切ったときに、過去の保険料拠出期間に応じた年金を支払う(過去に既に支払われた年金は除く)としたときの給付現価を考える。この場合、将来保険料が考慮されないため、数理的バランスシートにおいては、この給付現価は積立金と比較される。もう一つは開放基金基準または「継続 (going concern)」基準と呼ばれ、現在の加入者と新規加入者による将来の保険料現価と、過去と将来の拠出期間に応じた給付の現価を比較する。公的年金の数理的バランスシートには、この評価基準が適切であると考えられる。さらに、閉鎖基金基準と呼ばれる、新規加入者を見込まず現在の加入者に関する保険料現価と給付現価を比較する基準がある。

第二に、流動性確保の条件は、各時点において制度は次の給付の支払いをカバーするのに十分な現金収入と流動資産を保有しなければならないことを意味する。この条件は、

$$C(t) + H(t) \geq B(t)$$

が、任意の t において成り立つこと、と表現される。ここで、 $H(t)$ は保険料以外の現金収入と流動資産を表す。流動性確保の(十分)条件は、積立比率や収支比率などの財政指標を用いて定式化される。流動性確保の条件を検証するためには、給付費と拠出対象所得総額の推計値に基づく制度の収支見通しにおいて財政指標で述べられた条件が満たされているかを確認する必要がある。

4.3 保険料率の長期的な設定手法

財政方式とは年金給付費の財源調達方法を一般に意味するが、その中心となるのは、長期的な保険料率の設定方法である。以下に、二つの典型的な財政方式を述べる。

第一に、(純粋な)賦課方式は、各年の給付費に等しい保険料率を設定する方法である。すなわち、

$$p(t) = C^{PAYG}(t) = \frac{B(t)}{S(t)}.$$

この財政方式の下では保険料率は給付費とともに毎年変動する。年金制度が積立金を保有するならば、積立金に関する運用収入は給付支払いにあてることができ、保険料率はその分低

くすむ。この財政方式は、収支均衡の条件と流動性確保の条件の双方を満たすことに注意せよ。（この保険料率は、各年における収支均衡の条件、または、流動性確保の条件において $H(t) = 0$ とした式から導かれることに注意。）

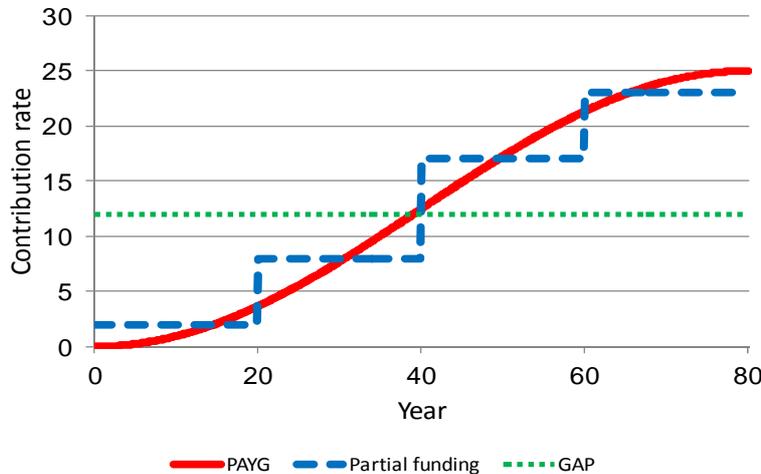
第二に、平準保険料率は、次式により計算される。

$$p(t) = C^L = \frac{PV[B(t)] - F_0}{PV[S(t)]}.$$

この保険料率は長期的収支均衡の条件から導かれる。しかし、この保険料率を適用した場合、収支比率が正となる状況を考えればわかるように、流動性確保の条件は常に満たされるとは限らない。したがって、この財政方式の下では、年金制度の財務担当者は、収入および資産において支払いに十分な流動性を常に確保する必要がある。

実際、多くの公的年金制度では、これら二つの中間的な財政方式が採用されている。このクラスの財政方式は、部分積立方式や段階保険料率方式などと呼ばれる。一つの例は、与えられた期間を通じて積立金の取り崩しを避けるよう保険料率を定めるスケールドプレミアム方式 (Scaled Premium Method) と呼ばれる財政方式である（詳しくは4.A節を参照）。

図 4.4 様々な財政方式における将来の保険料率の推移



4.4 先進国における財政再計算と財政指標の適用例

本節では、財政指標が財政再計算において実際にどのように使われているかについて、米国、ドイツ、カナダ、および日本を例にとって紹介する。

(1) アメリカ

米国の老齢遺族障害保険(OASDI)では、年金額は消費者物価指数(CPI)の上昇率により毎年ス

ライドされる。しかし、OASDI信託基金の積立比率が年初において20%を下回るならば、その年における年金スライド率はCPI上昇率あるいは平均賃金指数上昇率のいずれか低い方に制限されるという規定（安定化条項）¹がある。ただし、同保険制度はこの水準を十分上回る積立金を保有してきているので、これまでにこの条項が発動されたことはない。

さらに、OASDI信託理事会は、積立比率の10年間の短期見通し（中位の仮定）において次の短期の支払い準備のテストを適用している。すなわち、当初の積立比率が100%を超えていれば、将来10年間の推計期間を通して少なくとも100%の水準を維持しなければならない。また、当初の積立比率が100%未満の場合、積立金を枯渇させることなく5年以内に積立比率を100%以上に回復し、残りの期間その水準を維持しなければならない。2011年時点におけるOASDI信託基金の積立比率は354%であるので、短期の支払い準備のテストの条件は、以降の10年間で $a(t) \geq 1$ となること、と述べるができる。2012年OASDI信託理事会報告書によると、OASDI信託基金は全体としてこの基準を満たしている²。

なお、同理事会は、将来75年間にわたる長期見通しに関して以下の長期的な数理的収支均衡に関するテストを適用している。その条件は、基準時点を始点にして、10年後から75年後の各年を終点にする66の評価期間において、数理的収支が均衡することである。ただし、長期推計に伴う不確実性を考慮して、平準保険料率比で10年間で0%から75年間で-5%までの許容範囲を設けている。2012年OASDI信託理事会報告書によると、中位の仮定で、OASDI信託基金の75年間の数理的収支は-2.67%（課税対象所得現価比）と推計されている、これは平準保険料率比では-15.97%となっており、許容範囲を超えている。したがって、積立金は2021年から取り崩され、2033年には枯渇すると見込まれている。この不足分を埋め、長期的な収支の均衡を回復するためには、2012年報告書では、①保険料率の2.61%の即時引き上げ、または、②給付の16.2%の即時引き下げ、③保険料以外の財源を充てる、あるいはこれらを組み合わせて同等な財政効果の得られる方策が遅滞なく講じられる必要があるとしている。

(2) ドイツ

ドイツの被用者年金保険では、各年の保険料率は、予測される費用が国庫負担と保険料によって適切に賄われるとともに、年末において必要な支払備金を保有するよう定められる³。支払備金の水準の範囲は、年間支出から国庫負担を除いた額の一カ月分平均の0.2倍以上、1.5倍以下である。この条件は、積立比率を用いて $0.017 \leq a(t) \leq 0.125$ と表わされる⁴。ドイツの例は、ほぼ純粋な賦課方式で運営されている年金制度が給付の円滑な支払いのために保有すべき最低限の積立金の水準を示していると考えられることができる。

¹ Social Security Act 215(i)(1)c.

² 歴史的経緯から、OASDI信託基金は、OASI（老齢遺族）とDI（障害）の二つの基金からなる。個別にみると、DI信託基金は短期の支払い準備のテストに合格しておらず、2012年報告書の中位の仮定での短期推計によると、2013年に積立比率が100%を割り、2016年には積立金が枯渇するものと見込まれている。

³ Sozialgesetzbuch VI. § 158.

⁴ 厳密にいえば、積立金を年末の時点としているので、積立比率の定義を $a(t) = F(t)/B(t)$ と変更する必要がある。

なお、ドイツの毎年の年金財政報告においては、将来15年間の財政見通しが義務づけられている¹。さらに、この将来見通しにおいて、①保険料率が2020年までに20%を上回るか、2030年までに22%を上回ること²、あるいは、②45ポイントを得た受給者の年金額の、現役労働者の平均可処分所得に対する代替率が67%を下回ること、が見込まれる場合、政府は適切な対策を講ずることとされている。

(3) カナダ

カナダペンションプランの第15回財政再計算（基準日1993年12月31日）においては、1992年から2016年の25年間の保険料スケジュールは1991年に合意されていたが、2017年以降の保険料率の設定には「15年方式」と呼ばれる方法が適用された。この条件は次の通り。

- 1° 保険料率は毎年一定幅で引き上げられる。
- 2° 保険料率の引き上げ幅は5年毎に改定される。
- 3° 保険料率の引き上げ幅は、その引き上げが15年間適用されたとしたときの積立金が翌年（すなわち16年目）の支出の2倍に等しくなるような最小の引き上げ幅として定められる。

条件1° と2° より、2017年以降の保険料率は次式で表される。

$$p(t) = p_0 + \sum_{i: t_i < t} \Delta p_i \cdot \min(t - t_i, 5).$$

ここで、

t_i : 2017年以降の*i*番目の財政再計算の年（5年毎に実施される）即ち、 $t_i = 2016 + 5i$ 。

p_0 : 2016年における保険料率

Δp_i : $t = t_i + s$ ($1 \leq s \leq 5$) の各年における保険料率の引き上げ幅。

条件3° より、 t_i 年において、次の5年間適用される引き上げ幅 Δp_i は $a(t_i + 16) = 2$ を満たすよう決められる。なお、 $a(t_i + 16)$ の推計にあたっては、保険料率は毎年 Δp_i ずつ15年先まで（すなわち $t_i + 15$ 年まで）継続して引き上げられていくものと仮定する。

上に述べた将来保険料率の設定方法に関する規定は、世代間公平性の改善のため積立方式への移行を目指した1997年の法改正において変更された。また、1997以降、財政再計算は少なくとも3年に1回実施されることとなった。

改正案の財政効果を分析した第16回財政再計算（基準日1997年 9月）では、25年スケジュールは改められ、将来の保険料率は以下のように設定されることとなった³。

¹ Sozialgesetzbuch VI. § 154.

² 2012年の時点では、2030年までの保険料率の推計には15年より長期の推計を必要とすることに注意。

³ Canada Pension Plan § 113.1(4)(c).

- 1° 2002年まで保険料率を毎年一定の幅で引き上げていく。
- 2° 2003年以降の期間においては、「定常保険料率」と呼ばれる一定の保険料率が適用される。
- 3° 定常保険料率は、積立比率が概ね一定であることを保証する最小の保険料率として決定される。

上の条件3° において、「積立比率が概ね一定」という条件は、2030年と2100年の（年末の）積立比率が等しくなること（すなわち、 $a(2030) = a(2100)$ ）¹とされ、定常保険料率は9.9%と定められた。また、1997年以降に行われる後発の給付改善の費用負担は、完全積立方式でなされることとなった²。

その後の第17回財政再計算（基準日1997年12月31日）からは、次期再計算までの3年間に現行の保険料率で年金財政が安定的に運営されるかを検証し、かつ、3年後の次期再計算を基点としてその10年後と60年後の（年末の）積立比率が等しくなる（すなわち、 t_0 を再計算の年とすると $a(t_0 + 13) = a(t_0 + 63)$ となる）ような保険料率 —最低保険料率と呼ばれる— を計算し、現行の保険料率と比較している。第25回再計算（基準時点2009年12月31日）によれば、最良の仮定の下で、最低保険料率は9.85%と現行の定常保険料率にほぼ等しく、最低保険料率の下で積立比率は $a(2022) = a(2072) = 4.7$ と推計された。

(4) 日本

日本の厚生年金保険の1999年以前の財政再計算においては、将来の保険料率は次の条件により決定されていた。

- 1° 保険料率は、制度が成熟する目標年まで一定の引き上げ幅で5年毎に引き上げられる。
- 2° 目標年からは、最終保険料率と呼ばれる一定の保険料率が適用される。

条件1° と2° より、将来の保険料率は次式で表される。

$$p(t) = \begin{cases} p_0 + \Delta p \left\lfloor \frac{t - t_0 + 1}{5} \right\rfloor & (t_0 \leq t \leq T - 1) \\ p_{\text{final}} & (t \geq T). \end{cases}$$

ここに、

- t_0 : 財政再計算年
- p_0 : 当初の保険料率
- p_{final} : 最終保険料率
- Δp : 5年毎の保険料率の引上げ幅
- T : 最終保険料率の目標年(1999年再計算では2025年とされた)

¹ カナダの財政再計算報告書では、積立比率を年末の積立金の翌年分の支出に対する比と定義しているため、 $a(t) = F(t)/B(t+1)$ と変更する必要がある。

² Canada Pension Plan § 113.1(4)(d).

[x] : x 以上の最小の整数.

さらに、引き上げ幅の設定にあたっては、目標年までの各年において

- 3° 収支が負にならないようにする.
- 4° 社会経済情勢の変化に備えてある程度の積立金を保有する.

という条件が課せられた. これらの条件は、それぞれ $b(t) \leq 1$ および $a(t) \geq a_0$ (ここで a_0 は積立水準の目標値) と表わされる.

また、最終保険料率は、1999年財政再計算では、2025年を基準時点とする平準保険料率(均衡期間は無限大)とされた. このようにして定まる最終保険料率が、標準報酬の30%以内となるように必要な給付と負担の見直し(特に支給開始年齢の65歳までの段階的引き上げおよび基礎年金国庫負担の3分の1から2分の1への引き上げ)が提案された.

2004年改正では、将来の現役世代の過重な負担を避ける観点から、保険料率水準の固定および給付水準の自動調整の仕組みが導入され、財政計画のありかたが大きく変更をうけることとなった¹. すなわち、それまでは、5年に一度、人口推計や経済見通しの改訂をふまえて、法律で定められた給付内容に基づく費用を負担するために必要な将来の保険料率を決めることが財政再計算の主な目的であったが、2004年以降は、法律で定められた将来保険料率²の下で年金財政の均衡を図る経過的特例措置としての年金改定率の調整(マクロ経済スライド)の終了時点³を定めることに焦点が移った⁴. いいかえれば、財政の均衡という目的達成のために、制御すべき政策パラメータが保険料率から給付水準の調整期間に取り替わり、将来の給付水準が継続して監視される状態変数となったといえる. このような変更により、公的年金の財政状況の5年毎の点検・評価のプロセスは財政検証と呼ばれることとなった.

ここで、給付水準調整の実施の有無またその期間設定の条件は、有限な財政均衡期間(おおむね100年間、実際には95年間が採られている)にわたって財政が均衡し、その終了時に支払備金程度の水準の積立金(給付費の1年分とされている)を保有すること(すなわち、 t_0 を財政検証の年とすると $a(t_0 + 95) \geq 1$)と規定された.

ただし、無条件な給付水準の自動調整は、社会経済状況が見込みよりも悪化した場合、適切な水準の給付を行うという年金制度の本来の目的を危うくする恐れがある. それに歯止めを

¹ 日本の2004年改正以降の記述にあたっては、次の文献を参考にした.

厚生労働省年金局数理課、『平成21年財政検証結果レポート』, 2010.

坂本純一, 「公的年金制度の役割と財政の自動均衡措置における給付水準下限規定」, 『知的資産創造』, 2007年11月号. pp.66-83.

² 当初の13.58%から、2004年10月に0.354%引き上げた後、毎年9月に0.354%ずつ引き上げ、2017年9月以降は18.3%に固定する. なお、保険料率は年収(総報酬)ベースの値.

³ 2004年時点で支給されていた年金は、過去のデフレ時に年金額を据え置いたことにより、本来の水準よりも高い特例的な水準となっていたことから、2006年以降、特例水準の年金額を、物価が上昇しても据え置く一方、物価が2005年の水準を下回った場合にその分だけ引き下げるにより本来水準に復帰させる措置がとられている. マクロ経済スライドによる調整は、この特例水準が解消されるまでは実施されず(2010年では、本来水準との差は2.2%)、2012年初の時点では発動されていない.

⁴ 先に述べたカナダの例に鑑みれば、財政検証は、(通常の財政再計算と同じ手順で求める)財政を均衡させる保険料率が、法定化された保険料率の水準以内に収まるように給付水準の調整期間を決めるプロセスであるという見方もできる.

かけるのが給付水準の下限規定である。2004年改正では、標準的な年金額（夫：平均賃金で40年間厚生年金加入，妻：40年間国民年金加入，の夫婦が65歳に達したとき受け取る年金額の合計）の現役被保険者の平均手取り収入に対する比率（「所得代替率」と呼ばれる）が、将来にわたり50%を上回る水準を維持することとされた。給付水準の下限規定とは、所得代替率が給付水準の調整期間において次の財政検証までの間に50%を下回ると見込まれる時点で調整を終了し、制度の給付と負担の抜本的な見直しを行う¹、というものである。

4.5 一般化スケールドプレミアム

前節でみた、米国、ドイツ、カナダ、日本の例においては、保険料率を決定する条件は、積立比率や収支比率といった財政指標を用いて述べられていた。実際、4.3節に述べた財政方式の例を含む、保険料率設定の非常に一般的な方法が、財政指標に関する条件を用いて統一的に得られる。これを筆者は一般化（された）スケールドプレミアム（Generalized Scaled Premium）と呼んでいる。本節では、この財政方式について詳述する。

なお、一般化スケールドプレミアムという用語は、この概念が、4.3節に述べた（本来の）スケールドプレミアム—すなわち均衡期間において積立金の取り崩しを避けるような最小の保険料率—を特別な場合として含むことからそう名付けた。実際、スケールドプレミアムは、収支比率が1以下であるという条件で定まる一般化スケールドプレミアムである。

(1) 問題の設定

基準時の積立金、将来の予定利率、将来の支出及び拠出対象所得総額の推計値は所与であると仮定する。このとき、問題は次のように述べられる：「均衡期間と財政指標の目標値が与えられたとき、均衡期間を通じて財政指標が与えられた目標値を満たすような一定の保険料率のなかで最小のものを求めよ」。

いま、 $[n, m]$ を均衡期間とし、 a_0, b_0 をそれぞれ積立比率と収支比率の目標値とする。上記の問題の解となる保険料率を $GSP_{n,m}(a \geq a_0, b \leq b_0)$ と表わし、これを均衡期間 $[n, m]$ と目標値 a_0, b_0 に関する一般化スケールドプレミアムと呼ぶ。以下では t は年を表わす。

(2) 保険料率の決定プロセス

本節では、一般化スケールドプレミアムがどのようにして決定されるかについて述べる。

まず、 $GSP_{n,m}(a \geq a_0)$ を計算するため、積立比率が $t = d$ ($n < d \leq m$)²において目標値を達成するような（すなわち、 $a(d) = a_0$ となる）保険料率を $Q_d(a = a_0)$ とかく。すると、

¹ 法改正に要する時間を考慮すれば、所得代替率が50%を下回る可能性が高いと判断された時点から、先を見越した制度見直しの検討が始められるべきである。

² 均衡期間の初年 ($t = n$) における積立比率は、既に実績値となっている（積立比率の定義における積立金は年初の値であったことに注意）ので、この範囲から除外しておく。

$$GSP_{n,m}(a \geq a_0) = \max\{Q_d(a = a_0); n < d \leq m\}$$

となる． 実際， もしも $GSP_{n,m}(a \geq a_0)$ がある $Q_h(a = a_0)$ ($n < h \leq m$) よりも小さいとすると， $a(h) < a_0$ であり， これは条件が $t = h$ において満たされないことを意味している．

同様に， 収支比率が $t = d$ ($n \leq d \leq m$) において目標値を達成するような（すなわち， $b(d) = b_0$ となる）保険料率を $Q_d(b = b_0)$ とかくと，

$$GSP_{n,m}(b \leq b_0) = \max\{Q_d(b = b_0); n \leq d \leq m\}$$

である．

まとめると，

$$GSP_{n,m}(a \geq a_0, b \leq b_0) = \max\{GSP_{n,m}(a \geq a_0), GSP_{n,m}(b \leq b_0)\}$$

となる．

上述の議論は， 一般化スケールドプレミアムを計算するための手続きを示している． すなわち， ①均衡期間の各年 d について $Q_d(a = a_0)$ と $Q_d(b = b_0)$ を計算し， ②それらの最大値をとったものが， 条件をみたす最小の保険料率となっている．

年金数理の実際においては， 賦課費用率が増加するならば， $Q_d(a = a_0)$ や $Q_d(b = b_0)$ は d に関して単調増加することが経験的に知られている¹． よってその場合， 最大値は均衡期間の最終年 $d = m$ において達成される．

(3) 保険料率の計算式

ここでは， $Q_d(a = a_0)$ と $Q_d(b = b_0)$ の計算式を求める．

1° 方針

与えられたデータをまとめると次の通り．

- 均衡期間: $[n, m]$;
- 積立比率と収支比率の目標値: a_0 および b_0 ;
- 初期積立金: $F(n - 1)$;
- 給付費と拠出対象所得総額の推計値: $B(t)$ および $S(t)$ ($n \leq t \leq m$) ;
- 予定利率: $i(t)$ (または， 割引率: $v(t) = (1 + i(t))^{-1}$) ($n \leq t \leq m$) .

問題を解くにあたっての我々の方針は次のとおりである． まず， 以上のデータから， 積立金

¹ 本来のスケールドプレミアムについては， ある条件の下でこの性質が必ず成り立つことが証明される． 詳しくは4.A節を参照．

に関する基本的な漸化式を解いて $F(t)$ を $F(n-1)$ および $B(k), S(k), i(k)$, (または $v(k)$) ($n \leq k \leq t$) で表わす. 次に, 財政指標の $t = d$ における目標値達成の条件を積立金の一般解と連立させて, 一定の保険料率 $p(t) = p$ を求める.

2° 積立金の一般解

4.1 節の最初に掲げた(4.3)式と(4.4)式より, 積立金の時間発展を表わす漸化式(差分方程式)は

$$F(t) = (1 + i(t)) \cdot F(t-1) + \sqrt{1 + i(t)} \cdot (pS(t) - B(t)),$$

あるいは,

$$v(t)F(t) = F(t-1) + v(t)^{\frac{1}{2}} \cdot (pS(t) - B(t)) \quad (*)$$

とかける.

この方程式を $F(t)$ について解くために, 次の記号を導入する.

$$V(t) = \prod_{k=1}^t v(k) \quad ; \quad W(t) = V(t-1) \cdot v(t)^{\frac{1}{2}} \quad (t = 1, 2, 3, \dots).$$

また, $V(0) = 1$ と約束する. 式(*)の両辺に $V(t-1)$ を乗ずることにより次式を得る. (なお, $V(t) = V(t-1) \cdot v(t)$ に注意.)

$$V(t)F(t) = V(t-1)F(t-1) + pW(t)S(t) - W(t)B(t).$$

これより, $t \in [n, m]$ について,

$$\sum_{k=n}^t [V(k)F(k) - V(k-1)F(k-1)] = \sum_{k=n}^t [pW(k)S(k) - W(k)B(k)]$$

となるから, $F(t)$ に関する漸化式の解は次式で与えられる.

$$V(t)F(t) = V(n-1)F(n-1) + p(\overline{S(t)} - \overline{S(n-1)}) - (\overline{B(t)} - \overline{B(n-1)}). \quad (**)$$

ここで,

$$\overline{S(t)} = \sum_{k=1}^t S(k)W(k) \quad ; \quad \overline{B(t)} = \sum_{k=1}^t B(k)W(k)$$

とおいた.

3° $Q_a(a = a_0)$ の計算式

積立比率に関する $t = d$ における目標値達成の条件は、 $a(d) = a_0$ 、すなわち、

$$F(d-1) = a_0 B(d)$$

である。積立金の表示式(**)において $t = d-1$ とおいたものを上式に代入して p について解くと、次を得る。

$$p = Q_a(a = a_0) = \frac{a_0 V(d-1)B(d) - V(n-1)F(n-1) + (\overline{B(d-1)} - \overline{B(n-1)})}{\overline{S(d-1)} - \overline{S(n-1)}}$$

$$(d = n+1, n+2, \dots, m).$$

これより、特に、 $Q_a(a = a_0)$ において $a_0 = 0$ とおいたものは、期間 $[n, d-1]$ における平準保険料率に等しいことがわかる。したがって、一般化スケールドプレミアムの概念は、平準保険料率を特別な場合として含んでいることがわかる。

4° $Q_a(b = b_0)$ の計算式

同様に、収支比率に関する $t = d$ における目標値達成の条件は、 $b(d) = b_0$ 、すなわち、

$$C(d) - B(d) + b_0 I(d) = 0$$

である。この条件式に、4.1節の最初に掲げた(4.2)式と(4.4)式において $t = d$ とおいたものを代入すると、

$$pS(d) - B(d) + b_0 \left[(\sqrt{1+i(d)} - 1)(pS(d) - B(d)) + i(d)F(d-1) \right] = 0$$

となる。これに積立金の表示式(**)において $t = d-1$ とおいたものを代入し、 p について解くと、次を得る。

$$p = Q_a(b = b_0) = \frac{(1 + b_0(v(d)^{-1/2} - 1))V(d)B(d) + b_0(1 - v(d))(\overline{B(d-1)} - \overline{B(n-1)}) - V(n-1)F(n-1)}{(1 + b_0(v(d)^{-1/2} - 1))V(d)S(d) + b_0(1 - v(d))(\overline{S(d-1)} - \overline{S(n-1)})}$$

$$(d = n, n+1, \dots, m).$$

先に述べた注意により、上において $b_0 = 1$ とした場合が、この均衡期間における（本来の）スケールドプレミアムである。

5° 補論： $GSP_{n,m}(b \leq b_0)$ の一般化

ここでは、 $GSP_{n,m}(b \leq b_0)$ をさらに一般化した保険料率の計算式を導く。

短期の流動性確保の条件は、

$$C(t) + H(t) \geq B(t),$$

ここに、

- $C(t)$: t 年における保険料収入
 $H(t)$: t 年における保険料以外の現金収入
 $B(t)$: t 年における支出

であった。ここで、 $H(t)$ の理論的な範囲は次により与えられる。

$$0 \leq H(t) \leq F(t-1) + I(t).$$

ここで、

- $F(t-1)$: t 年初における積立金
 $H(t)$: t 年における運用収入

である。したがって、

$$H(t) = \alpha I(t) + \beta F(t-1) \quad \alpha, \beta \in [0,1]$$

とかくことができる。ここで α と β は、それぞれ運用収入と積立金において流動化可能な額の割合を表す。

そこで、一般に、流動化比率と呼ぶ新たな財政指標を次のように定義する：

$$l(t) = \frac{B(t) - C(t)}{H(t)} = \frac{B(t) - C(t)}{\alpha I(t) + \beta F(t-1)}.$$

したがって、流動化比率は、支出が保険料収入を上回る場合、保険料以外の流動化可能な収入のうち支出超過分を賄うために現金化する必要のある部分の割合を表している。 $\alpha = 1$ かつ $\beta = 0$ ならば、 $l(t) = b(t)$ であることに注意。

上と同様にして、(α と β の値は知られているものとして)均衡期間 $[n, m]$ を通じて流動化比率の目標値 l_0 を保証する一定の保険料率のうち最小のものを考えることができる。その保険料率を $GSP_{n,m}(l \leq l_0)$ とかくと、上と同様の計算により、次の結果を得る。

$$GSP_{n,m}(l \leq l_0) = \max\{Q_d(l = l_0); n \leq d \leq m\}.$$

ここに

$$Q_d(l=l_0) = \frac{(1+l_0\alpha(v(d)^{-1/2}-1))V(d)B(d)+l_0[\alpha(1-v(d))+\beta v(d)](\overline{B(d-1)}-\overline{B(n-1)}-V(n-1)F(n-1))}{(1+l_0\alpha(v(d)^{-1/2}-1))V(d)S(d)+l_0[\alpha(1-v(d))+\beta v(d)](\overline{S(d-1)}-\overline{S(n-1)})}$$

$(d = n, n+1, \dots, m)$.

なお、 $\alpha = 1$ かつ $\beta = 0$ ならば、 $GSP_{n,m}(l \leq l_0) = GSP_{n,m}(b \leq l_0)$ であることに注意。

注意. 上においては、 α と β の値は所与として、与えられた流動化比率の目標値を保証する保険料率を考えた。より実際的な問題は、逆に、決められた保険料率の下で、必要な流動性を確保するために、すなわち

$$\alpha l(t) + \beta F(t-1) \geq B(t) - C(t)$$

が各時点で成立するように、(運用のリターンを考慮しつつ) 流動化すべき割合 $\alpha, \beta \in [0,1]$ の値を決めることである。

(4) 目標水準設定の政策

以上、財政指標の目標値が与えられたとき、均衡期間を通じてそれらの目標値を満たすような保険料率を求める計算式を求めた。ならば、積立比率と収支比率の目標水準をどの程度に設定すべきか、という政策的課題が生ずる。既に各国の例でみた通り、万国共通の普遍的なルールはなく、各国がその国の状況と年金制度の現状に応じて、独自のルールを策定している。社会保障アクチュアリーは、その専門性をこうした政策の決定においても積極的に発揮すべきである。

4.6 補足と今後の課題

最後に、年金財政の数理的評価に関して、補足すべき点や今後議論すべき課題について簡潔に列挙する。

(1) 年金給付費と拠出対象所得総額の将来推計

保険料率の設定方法の説明にあたっては、年金給付費と拠出対象所得総額の将来推計値は与えられたものと仮定したが、これらの推計を行うことは、社会保障アクチュアリーの仕事である。その際には、数理的基礎率の作成とともに、整合性のとれた人口と経済の仮定を設定することが重要である。また、推計を実行するためのシミュレーションモデルの構築や更新も必要である。ILOにおける途上国の技術援助における必要から、筆者はExcel VBAによる、各国に適応可能な年金給付費推計モデルを作成した ([ILO-PENS]参照)。

(2) 年金改革の財政効果

年金改革においても、財政再計算は、改革の財政効果を評価する役割を果たす。これは、現行法と改正法の両者に基づく財政見通しを作成し、保険料水準、数理的収支、その他の指標を比較することによって行われる。

(3) 年金積立金の運用と管理

年金積立金の運用にあたっては、流動性の要件を満たしつつ、リスクとリターンの最適な組み合わせを実現するポートフォリオを選択することが求められる。なお、年金基金は通常、大きな投資家であり、資本市場へ大きな影響を与えることにも注意を払う必要がある。

(4) 推計値と実績値の比較

一般的に、推計値と実績値には乖離がある。財政再計算の中間年においては、それらを比較し、その差が何に起因するかを明らかにする分析が行われるべきである。

(5) 感度分析と確率的推計

前節までは、給付費と拠出対象所得の時系列の推計値を決定論的に扱ってきた。人口や経済に関する前提における不確実性に対処するために、通常、複数の前提に基づく推計がなされ、仮定が変化した場合の推計値の変化を調べる感度分析が行われる。

理論的により進んだ立場からは、 $B(t)$ や $C(t)$ を確率変数（または確率過程）と考えることができる。この観点からは、決定論的な推計値はこれらの変数達の期待値であると考えられる。確率的推計では、数理的収支が0以上になる確率や、確率95%以上で100年後の積立比率を2以上とする保険料率といった値を、原理的に求めることができる。その実行には、計算可能なモデルの構築が課題となると思われる。

近年のアメリカOASDI信託理事会報告書では、通常の方法に基づく推計結果に加えて、時系列モデルを用いて、モンテカルロ法により5000本のシミュレーションを行った結果から求めた長期見通しの確率的推計結果を公開している。

(6) 所得分布や年金額分布の推計

通常採られているマクロ変数に関する推計値は、ミクロでみた分布に関する情報を含んでいない。グローバルな高齢化の傾向のなかで年金制度を持続可能なものとするために、給付水準を下げる圧力が強まると思われるが、その際、低所得や低年金による高齢者の貧困リスクは高まっていく。こうしたなかで、所得保障や貧困削減の観点からは、所得分布や年金額の分布に関する情報を知ることが重要となっている。

こうした分布に関する情報を提供可能とする一つのアプローチが、マイクロシミュレーショ

ンを用いたものである¹。こうしたモデルやデータベースの構築も先進国においては将来の課題となろう。

(7) 世代間の所得移転

長期的な収支均衡の条件は、無限期間のホライズンを持つソーシャルプランナーの問題としてみることができる。しかし、実際には、年金制度の保険料や給付は、順次重なり合いながら続いていく、一つ一つは有限期間の各世代が拠出し受給する額を集計したものである。世代間の所得移転の分析に用いられるのが世代会計によるアプローチである。年金による世代間所得移転のみに限定すれば、世代会計とは、各世代に関して保険料と給付の現価ベースでのバランスシートである。概念的には、過去から将来に至る全ての世代の世代会計を人口で加重して集計したものは、開放基金基準による年金制度の数理的バランスシートと同等である。

(8) 社会保障給付費や公会計との整合性

年金財政に関する指標や分析方法は、さらに包括的な公的制度一般に関する枠組みと整合的である必要がある。ここでは、その例として (i) 年金給付費と社会保障給付費や社会支出、および、(ii) 年金制度の数理的バランスシートと公会計（国のバランスシート）の二つを指摘するにとどめる。

(9) 公的年金の経済効果

所得再分配効果以外にも、公的年金は、(i) 個人の引退時期の決定、(ii) ライフサイクルにおける貯蓄と消費の配分、といったマイクロ経済的效果をもつと考えられている。こうした効果に関しては、実証データに基づく経済的分析が多く行われている。

4.A 本来のスケールドプレミアム²

4.5節で一般化スケールドプレミアム（GSP）について述べたが、本節では、本来のスケールドプレミアムとは何かについて、歴史的な背景も含めて補足する。

本来のスケールドプレミアムとは、与えられた均衡期間（次の財政再計算までの期間）において、年金制度が保有する積立金を取り崩さないような一定の保険料率のなかで最小のものとして定義された³。したがって、本来のスケールドプレミアムは、一般化スケールドプレ

¹ 日本に関しては、例えば次のような研究がある。

石井 太、「基礎年金の受給者数推計(Micro Simulation Approach)」、『厚生年金・国民年金平成11年財政再計算結果』, 2000. pp.185-188.

稲垣誠一、「マイクロシミュレーションモデルを用いた公的年金の所得保障機能の分析」『季刊・社会保障研究』第46巻第1号, 2010. pp. 23-34.

² 本節は[Hirose1] Chap 2.に基づく。

³ この場合、もし均衡期間の中途の時点で積立金を取り崩さなければならない状況になった場合、その時点で財政再計算が行われ、その時点を起点とする新たなスケールドプレミアムが設定される。

ミアム (GSP) において均衡期間中に収支が負にならないという条件 ($b \leq 1$) を課した特別な場合である。なお、用語の使い方について、保険料率を段階的に引き上げていく方式 (段階保険料率方式) 一般を指してスケールドプレミアム方式と呼ぶ人もいるので注意が必要である。

歴史的には、1956年にILOのZelenka¹が、年金制度を新たに導入する国に対する積立金の長期的な運用の観点から積立金非減少の条件を提唱し、1964年にThullen²がその条件をみたす保険料率としてスケールドプレミアムの計算式を導いた。この方式は、ILOの発展途上国への技術援助で推奨され、いくつかの国々によって採用されてきた。

4.5節では離散時間のケースを扱ったが、ここでは原論文に則って連続時間のケースでスケールドプレミアムの計算式を導くこととする。

いま、均衡期間 $[n, m]$ が与えられたとすると、そこにおける積立金の時間発展は

$$F'(t) = \delta(t)F(t) + \pi(t)S(t) - B(t)$$

という微分方程式によって記述される。

ここに

- $F(t)$: 時刻 t における積立金
- $S(t)$: 時刻 t における拠出対象所得総額 (密度)
- $B(t)$: 時刻 t における給付費 (密度)
- $\delta(t)$: 時刻 t における利力
- $\pi(t)$: 時刻 t における保険料率。

これを $F(t)$ について解くと、

$$F(t) = F(n)e^{\int_n^t \delta(s) ds} + \int_n^t (\pi(u)S(u) - B(u)) e^{\int_u^t \delta(s) ds} du$$

となる。

ここで $F'(t) = 0$ となる $[n, t]$ において一定の保険料率を $\varphi(t)$ とかくと、上式から計算により

$$\varphi(t) = \frac{B(t) + \delta(t) \int_n^t B(u) e^{\int_u^t \delta(s) ds} du - \delta(t) F(n) e^{\int_n^t \delta(s) ds} du}{S(t) + \delta(t) \int_n^t S(u) e^{\int_u^t \delta(s) ds} du}$$

¹ Zelenka, A. Quelques remarques sur le régime financier. In *Actuarial and Statistical Problems of Social Security, Vol. III*, Geneva-Rome, ISSA, 1958. pp.367-385.

² Thullen, P. The Scaled Premium System for the Financing of Social Insurance Pension Schemes: Maximum periods of equilibrium. *International Review on Actuarial and Statistical Problems of Social Security, No. 10*, ISSA, 1964. pp. 207-227. 余談であるが、Thullenは、元々純粋数学 (多変数函数論) の研究者であった。彼はナチスを嫌って南米のエクアドルに亡命した後、コロンビアやパナマでチーフアクチュアリーを務め、1950年代にスイスに移りILOの社会保障アクチュアリーとなった。

を得る.

よって、この均衡期間におけるスケールドプレミアムを $SP_{n,m}$ とかくと、

$$SP_{n,m} = \max\{\varphi(t); n \leq t \leq m\}$$

となる.

ところで、高齢化の度合いが低く、制度の成熟化が進行中の国の制度においては、最大値を均衡期間の最終時点とする、すなわち $SP_{n,m} = \varphi(m)$ となることがしばしば観察された¹. このような単純化がどのような条件の下で成り立つかを知ることは、理論的な関心のみならず、コンピューターが普及していなかった時代においては計算労力の節約という実用上の観点からも意味があった.

問題は、「均衡期間 $[n, m]$ において $\varphi'(t) \geq 0$ となる十分条件を求めよ」と述べられる. この問題に関して、利力は時間に依らず一定 ($\delta(t) = \delta$) と仮定した場合に、次の結果が知られている.

定理 1. (坂本純一²)

$$(C^{PAYG})'(t) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad S'(t) \geq 0 \quad \text{ならば,} \quad \varphi'(t) \geq 0.$$

定理 2. (S.N. Iyer³)

$$(C^{PAYG})'(t) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad B'(t) \geq 0 \quad \text{ならば}^4, \quad \varphi'(t) \geq 0.$$

ここで、 $C^{PAYG}(t) = \frac{B(t)}{S(t)}$ は賦課費用率 (年金費用率) である. なお、 $(C^{PAYG})'(t) \geq 0$ かつ $S'(t) \geq 0$ ならば $B'(t) \geq 0$ が従うので、現実的な状況では、定理 2 は定理 1 に比べてより一般的な条件で適用できる. この定理は、年金制度が成熟化の過程にあり、年金費用率と年金給付費がともに増加している状況では、上に述べた単純化が成り立つことを意味している.

上記二定理の利力が時間に依存する場合への拡張は、それぞれ以下のようになる.

定理 3. (赤塚正則⁵)

$$(C^{PAYG})'(t) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{S(t)}{\delta(t)}\right)' \geq 0 \quad \text{ならば,} \quad \varphi'(t) \geq 0.$$

¹ 原論文では、その表題からも類推されるように、与えられた均衡期間がスケールドプレミアムの下で積立金を取り崩さない最長の期間になることを仮定していた.

² 坂本純一、「Scaled Premium Methodについて」『日本年金学会誌』第2号, 1982. pp.60-64.

³ S.N. Iyer. *Actuarial mathematics of social security pensions*, ILO/ISSA. 1999. Appendix 5.

⁴ 厳密には、 $\varphi(t) \geq 0$ が常に成立しているという付加条件が必要であるが、 $\varphi(t) < 0$ となるのは初期時点の積立金が完全積立 (complete funding) を超えるような場合 (すなわち保険料収入なしでも給付が賄える状態) であるので、現実的には $\varphi(t) \geq 0$ となる状況のみが問題になる.

⁵ 赤塚正則、「Scaled Premium Methodについて」『厚生年金・国民年金平成11年財政再計算結果』, 2000. pp.209-219.

定理 4. (Ki-Hong Choi (崔杞洪, 최기홍) 1)

$$(C^{PAYG})'(t) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{B(t)}{\delta(t)}\right)' \geq 0 \quad \text{ならば}^2, \quad \varphi'(t) \geq 0.$$

以上の四定理の証明は、それぞれの引用文献の他、[Hirose1] Chap.2 にまとめてある。

問題. ここに掲げた結果は一つの均衡期間におけるスケールドプレミアムと $\varphi(t)$ の1階微分の関係を保っている。一方、複数の均衡期間にわたって、スケールドプレミアムを順次適用していくことを考えるとき、その引き上げ幅は $\varphi(t)$ の2階微分に関係していると推測できる。この関係を定式化して分析せよ。なお原論文では、保険料率の設定方法に関して、積立金非減少の条件に加え、保険料率の急激な引き上げを避けるという条件が述べられている。

4.B GDP比でみた年金給付費³

年金制度が賦課方式であると積立方式であるに関わらず、年金受給者がある時点で消費のために購入する財やサービスは、住宅などを除いて、その時点で労働者によって生産されたものである。この意味で、年金とは現役世代による生産物を高齢世代に振り向ける仕組みであるといえる。社会保険方式では年金額は過去の拠出期間と給与（報酬比例の場合）に基づいて算定されるのに対し、積立方式では拠出した保険料と資本市場での運用収入の総額から年金現価のような数理的な率を通して定まるという点が異なるのみである。このように、公的年金の本質は世代間の移転であり、年金給付費のGDPに対する比率(pension-to-GDP ratio)は、その移転の規模を測る指標であるといえる。2010年におけるこの指標の値は、先進国の平均で10%程度であり、日本の値もほぼ10%の水準である。

(1) 年金給付費の対GDP比の要因分解

年金給付費の対GDP比は次のような要素の積に分解できる。

$$\frac{P}{Y} = \frac{Pop_{65+}}{Pop_{20-64}} \cdot \frac{Pens}{Pop_{65+}} \cdot \left(\frac{Cont}{Pop_{20-64}}\right)^{-1} \cdot \frac{AvePens}{AveSal} \cdot \frac{T}{Y}.$$

ここに

P	: 年金給付費
Y	: GDP
T	: 拠出対象所得総額
Pop_{65+}	: 65歳以上人口
Pop_{20-64}	: 20歳 - 64歳人口

¹ Ki-Hong Choi. An application of the actuarial methods of ILO to the Korean National Pension System, Research report 2003-09, National Pension Research Institute, National Pension Service, Korea. 2003.

² 定理2と同様、 $\varphi(t) \geq 0$ を仮定している。

³ 本節は Hirose (ed.). *Pension Reform in Central and Eastern Europe – in times of crisis, austerity and beyond*. Budapest, ILO. 2011. のChap 1. Annex A: Technical notes に基づく。

<i>Pens</i>	: 年金受給者数
<i>Cont</i>	: 拠出者数
<i>AvePens</i>	: 平均年金額
<i>AveSal</i>	: 平均拠出対象所得.

上式の右辺各項に説明を加えると以下の通り.

第1項は, 老年人口(65歳以上人口)の生産年齢人口(20歳以上65歳未満人口)に対する比を表わし, 老年人口扶養指数(old-age dependency ratio)と呼ばれる.

第2項は, 年金受給者の老年人口に対する比を表わし, 年金受給者比率(pensioners coverage rate)と呼ばれる.

第3項の逆数は, 拠出者の生産年齢人口に占める割合を表わし, 年金制度適用率(contributors coverage rate)と呼ばれる.

第4項は, 平均年金額の平均拠出対象所得に対する比を表わし, (グロス)平均所得代替率(system replacement ratio)と呼ばれる.

第5項は, 拠出対象所得総額のGDPに占める割合(taxable income capture rate)で, 労働分配率, 所得補足率, 拠出対象所得の上下限に依存する.

上の分解式を用いて, 年金給付費の対GDP比の増加の要因分析を行うことができる.

また, 年金制度の観点からは, GDPの代わりに拠出対象所得総額をベースにする方が実情に即している. その場合, 4.1節でみたように, 次の要因分解が可能である.

$$\frac{P}{T} = \frac{Pens}{Cont} \cdot \frac{AvePens}{AveSal}.$$

左辺は年金費用率(または賦課費用率)と呼ばれる. 年金費用率が実際適用されている保険料率より高いときには, 保険料収入だけで年金給付費を賄うには十分でなく, 他の財源を充てる必要がある.

右辺の要素分解の第1項は年金受給者の拠出者に対する比で, 年金制度扶養指数(または成熟度)と呼ばれる. 第2項は(グロス)平均所得代替率である.

(2) 成熟した年金制度の負担可能性条件

4.5節でみたような保険料の設定方法は, 年金制度がまだ成熟途上で, 保険料率の引き上げが政策の選択肢になり得る場合に有効である. しかし, 高齢化が進行し年金制度が成熟した欧米や日本の場合, 保険料率の水準は既に相当程度にまで達しており, さらなる引き上げの余地が限られている.

既に成熟した年金制度がさらなる高齢化に直面した状況の下で財政的に負担可能である(affordable)とはどういうことであろうか. 上でみたように, 給付水準が一定ならば, 人口少子高齢化に伴って老年人口の生産年齢人口に対する比率が増加すれば, 年金給付費がGDP

に占める割合は上昇する。しからば、 P/Y が持続的に増加を続けていったらどうなるか。世代間格差が拡大するとか税社会保険料負担が限界に達し国際競争力が下がり経済活力がそがれるといった様々な説明が可能であるが、この場合に本質的なことは、現役世代が引退世代のために自らの稼いだ所得を移転（すなわち年金の費用を負担）することに同意しなくなるということである。これはとりもなおさずバトンタッチ型の世代間の社会的扶養システムとしての年金制度が破綻に瀕することに他ならない。

したがって、人口少子高齢化に伴う老年人口扶養指数の長期的上昇傾向のなかで「 P/Y が際限なく増加しない」ことが、年金制度が負担可能であるための一つの条件であるといえることができる。この条件は、年金給付費の対GDP比を一定の範囲内に抑えることと言い換えられるが、年金給付費の対GDP比に前もって固定された上限があるわけではないことを注意しておく。ある国において適切とされる給付水準にその国民の拠出者が同意するならば、高齢化が進行してもそれに比例した規模の世代間の所得移転が持続可能であることは十分あり得る。

一方、 P/Y の変化について次の式が成り立つ¹：

$$\Delta\left(\frac{P}{Y}\right) = \frac{N-D}{Y} + (i-g)\frac{P}{Y}$$

ここに、

- P : 年金給付費
- N : 新規に裁定された年金の総額
- D : 失権した年金の総額
- Y : GDP
- g : 名目経済成長率
- i : 年金スライド率.

上式を用いれば、 P/Y が増加しない、すなわち、 $\Delta(P/Y) \leq 0$ となる条件は、次の不等式で与えられる：

$$\frac{N-D}{P} \leq g - i.$$

この条件を年金制度の負担可能性条件(affordability condition)とここでは呼ぶことにしよう。この不等式の左辺は年金給付費の自然増加率、右辺は年金スライド率を基準にした実質経済成長率である。前者が後者以下に抑えられているとき、上の不等式が成り立つ。したがって、この条件を満たすためには、①受給要件の厳格化、給付率の引き下げ、年金受給可能年齢の引き上げなどにより新規の年金額 (N) を抑える、②スライド率 (i) を引き下げる、③名目経済成長率 (g) を引き上げる、といった政策がとられるべきである。なお、年金費用率を抑えるという観点からはGDPの代わりに拠出対象所得(標準報酬総額)を考慮する必要があるが、上記③に関連して、経済成長に伴う賃金上昇のみならず、未適用者の適用拡大や、所

¹ この式は、 $\Delta P = (N-D) + iP$ と $\frac{\Delta(P/Y)}{P/Y} = \frac{\Delta P}{P} - \frac{\Delta Y}{Y}$ を組み合わせることにより導かれる。

得補足の向上, 標準報酬の上限引き上げなどの方策も拠出対象所得の増加に貢献することを注意しておく.

以上の分析結果は, 公的債務に関する政府の予算制約条件 (ドーマーの条件) :

$$\Delta\left(\frac{D}{Y}\right) = -\frac{PB}{Y} - (g - r)\frac{D}{Y},$$

ここに,

- D : 公的債務残高
- PB : プライマリーバランス
- Y : GDP
- g : 名目経済成長率
- r : 名目公債金利

との類推から筆者が得たものである. なお, 年金給付費と公的債務の間には, 次のような相異点があることを指摘しておく. 第一に, 所得移転としての年金給付費の対GDP比は理論的には100%を超えることはない (例えば, 2010年代初頭に最も高いイタリアで15%程度) が, 公的債務残高にはアприオリな上限はない (例えば, 日本の2012年の公的債務残高はGDPの200%を上回る). 第二に, 重要な政策パラメータである公債金利とスライド率に関して, それらが定まる仕組みや政策決定の過程にはかなりの相違点がある¹.

¹ 年金制度の成熟度が高い中東欧諸国では, 年金スライド率の決定に政治的介入が行われ, それが年金財政安定化の政策遂行の障壁となっているケースがしばしばみられる.

第5章 人口推計の方法と安定人口モデル

本章では、人口動態について簡潔に述べた後、人口推計の方法と人口の数学モデルの一つである安定人口について述べる。

5.1 人口動態

人口動態 (population dynamics) の分析において基本となるのは、二時点間の人口の増減を記述する均衡方程式 (balancing equation) と呼ばれる次の関係式である。

$$P(t) = P(0) + B - D + Imm - Em.$$

ここに、

$P(t)$: 時点 t における総人口

$P(0)$: 基準時点 ($t=0$) における総人口

B : 基準時点から時点 t までの間の出生数

D : 基準時点から時点 t までの間の死亡数

Imm : 基準時点から時点 t までの間の国外からの移入人口

Em : 基準時点から時点 t までの間の国外への移入人口。

上式の右辺において、 $B - D$ が人口の自然増、 $Imm - Em$ が純移入人口である。

人口動態論としては、均衡方程式の各項について、第2章で既にふれた死亡のほか、人口統計 (各種統計調査)、出生 (特に低出生率の要因分析)、国際人口移動といった事項やそれらの変化が人口に及ぼす影響、さらには長期スパンで起こる人口転換についても説明を加えるべきであるが、ここでは深入りしない¹。ただ、国際人口移動に関して社会保障給付の受給権確保の観点から一言コメントを加えておく。グローバリゼーションと地域統合の拡大・深化は資本のみならず労働力の国境を越えた移動をもたらしており、既に一億人を超えると推計される移住労働者 (ILO推計、2010年時点) は今後とも増加していくものと思われる。こうしたなかで、複数の国で働く労働者に対して二重加入の調整や加入期間の通算を目的とする (二国間または多国間の) 国際社会保障協定の必要性は高まっている²。

5.2 人口推計の方法

人口の長期的趨勢は、経済成長の見込みとともに、将来の年金財政見通しや社会保障給付費の推計における重要な要因である。

将来人口推計 (population projection) はさまざまな機関が行っている。日本の場合、国立社会

¹ 例えば、国立社会保障・人口問題研究所 (www.ipss.go.jp) を参照。

² 移住労働者に関する社会保障の国際協調の基本原則や実例については Hirose, K., Nikac, M., and Tamagno, E., *Social Security for Migrant Workers - A rights-based approach*. Budapest, ILO, 2011. およびそこに挙げた参考文献を参照。

保障・人口問題研究所が国勢調査に基づいて5年ごとに行う将来人口推計（中位推計）が公式の推計として最も広く用いられているといえよう。国連は、世界のほぼすべての国と地域をカバーした将来人口推計を行っている。その結果は、*United Nations World Population Prospects*として2年ごとに改定版が公表されている¹。ILOの技術協力においても、信頼できるデータが少ない途上国においては、国連人口推計以外に頼れるものがないことが少なくない。しかし国連は、性・年齢別推計を5歳年齢階級別に5年間隔で行っており、年齢別のデータを必要とする年金財政見直しには十分ではない。そこで筆者は、主にILOの対途上国の技術援助における必要から、国連人口推計における出生率や死亡率の将来仮定の設定方法を適応して年齢別データを各年に出力するExcelを用いたシンプルな人口推計プログラムを作成した（[ILO-POP]参照）。

上に述べたいずれの将来推計も、コーホート要因法（cohort component method）と呼ばれる推計方法を用いている。その基本的な考えは、各コーホートの人口を、出生、死亡、国際移動の仮定と上に掲げた均衡方程式により年次を追って推計していくというものである。すなわち、基準時点における性・年齢別人口に対して、将来に向けて仮定された年齢別出生率、出生性比、年齢別死亡率、年齢別国際移動率を適用することによって、将来の性・年齢別人口を漸次推計していく。この推計方法の本質を示すために、女性のみを考慮した（出生率も女兒の出生のみを考慮する）国際移動のない人口集団（封鎖人口と呼ばれる）を考える。この人口集団に対する、離散型の人口推計モデルは以下のようにかける：

$$\begin{cases} l(0, t+1) = \sum_{x=15}^{49} b(x, t)l(x, t) \\ l(x+1, t+1) = p(x, t)l(x, t) \quad (0 \leq x \leq 98). \end{cases}$$

ここに、

$l(x, t)$: t 年の x 歳人口

$p(x, t)$: t 年の x 歳の生存率

$b(x, t)$: t 年の x 歳の出生率。

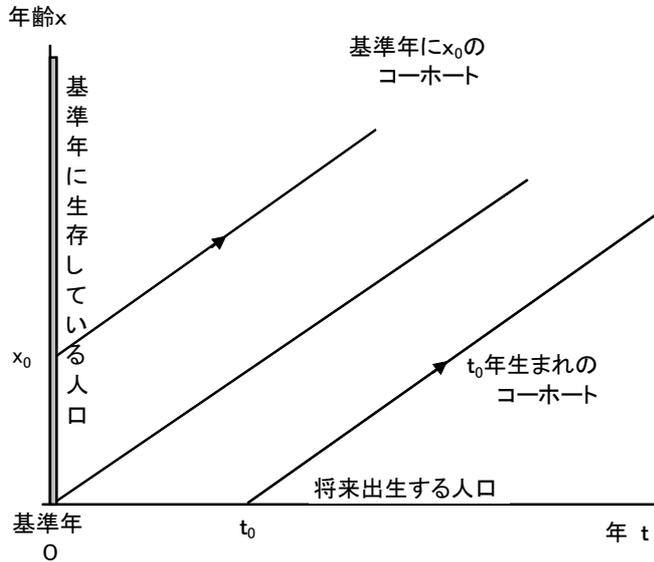
この人口推計モデルでは、最終年齢は100歳、再生産年齢は15歳から49歳までとした。また、基準年の年齢別人口と将来の年齢別出生率、死亡率は与えられているものと仮定する。

第一式は、各年齢からの出生を総和することにより翌年の0歳の人口を推計し、第二式は、ある年の各年齢の人口に年齢別生存率を乗ずることにより、次の年に1歳年齢の進んだ人口を推計している。

人口の年齢構造の時間変化を記述するために、時間を横軸に年齢を縦軸にとった座標系をとる。これをレキシス図(Lexis diagram)という（性別は一つ固定しておく）。レキシス図では、個体の時間発展は傾き1の直線 — コーホート線(cohort line)という — に沿って起こる。レキシス図では、初期値である基準年の人口の軌跡をコーホート線に沿って推計していくとともに、毎年の出生人口を推計してその軌跡を同様に推計していくという仕組みがみやすい。

¹ 2012年時点では、2010年版が最新版である。結果は、Department of Economic and Social Affairs, Population Division (www.un.org/esa/population) からアクセスできる。改定の度に、様々な推計方法の改善がなされている。

図 5.1 レキシス図における人口推計の仕組み



上の人口推計モデルは、行列記法で、

$$\mathbf{l}(t+1) = A(t)\mathbf{l}(t)$$

とかける。ただし、

$$\mathbf{l}(t) = \begin{pmatrix} l(0, t) \\ l(1, t) \\ \vdots \\ l(99, t) \end{pmatrix}$$

は t 年の人口ベクトル、

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & b(15, t) \cdots & b(49, t) \cdots & 0 & 0 \\ p(0, t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p(1, t) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(2, t) \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p(98, t) & 0 \end{pmatrix}$$

は、人口ベクトルの t 年から $t+1$ 年への推移を表す行列で、レスリー (Leslie) 行列と呼ばれる。一般に、レスリー行列は、第1行 $((1, i)$ 成分)と対角成分のすぐ下の成分 $((i+1, i)$ 成分)のみが非負でその他の成分は0に等しい行列となる。

この記号を用いれば、基準年を $t=0$ としたときの t 年の人口ベクトルは

$$\mathbf{l}(t) = A(t-1) \cdots A(1)A(0)\mathbf{l}(0)$$

で与えられる。

実際の推計では、①基準年人口、および、②将来の年齢別出生率、死亡率、移動率の仮定が、将来の推計人口を決定する要素となる。とくに後者には不確定性が伴うため、複数の仮定を設定することが多い。例えば国立社会保障・人口問題研究所の日本の将来人口推計では、出生率については三通り（上位、中位、低位）、死亡率については一通りの仮定がなされている。国連の各国の推計でも同様に出生率については三通り、死亡率については一通りの仮定が基本であるが、それらに加えて、出生率と死亡率が直近の水準に固定された推計や、エイズ感染率が高い国々に対してエイズによる死因を除いた死亡率での推計も行っている。

5.3 安定人口¹

人口動態に関する諸要素を固定して十分時間が経過した極限の状態を想定することによって、現実の複雑な人口現象を理想化した人口モデルが得られる²。

定常人口（静止人口；stationary population）とは、毎年一定数の出生があり、かつ、年齢別死亡率が一定不変と仮定した場合の人口モデル（国際移動はないものとする）である。定常人口は、生命表における生存関数 l_x と本質的に同等である。定常人口では年齢別人口は一定（したがって総人口も一定）、また年齢別死亡数も一定でその総和は出生数と同数となる。このように、定常人口は極めて単純化された人口モデルであるが、年金数理の教科書では、定常人口を制度の成熟時の状態と考え、その仮定の下で様々な財政方式(funding method)の保険料率や過去勤務債務などを計算するのが通例である。

定常人口における出生数一定という仮定を年齢別出生率が一定という仮定におきかえることにより安定人口(stable population)の概念が得られる。すなわち、年齢別出生率と年齢別死亡率がそれぞれ一定不変と仮定した場合（国際移動はないものとする）、十分時間が経過したとき、人口は一定の増加率で不変な年齢分布に近づく。これを安定人口という。安定人口の増加率および年齢分布は初期人口によらず、仮定された出生率と死亡率のみによって定まる。実際に人口推計を行った人ならば、初期人口が将来出生する人口に置き換わる頃（ほぼ60～80年先）には人口ピラミッドがほぼ不変な年齢分布に収斂していくことを観察した経験があるだろう。

安定人口の存在と人口の安定人口への漸近は、連続型のモデルに対して稲葉寿『数理人口学』（東大出版会、2002）で「シャープ・ロトカ・フェラーの定理」として厳密に証明されている。ここでは、離散型の行列人口モデルについて非負行列に関するペロン・フロベニウスの定理を応用した証明のあらすじを述べる^{3,4}。示したいのは次の定理である。

定理.

¹ 本章は[Hirose1] Chap.6 に基づく。

² 現実問題としては、現在の状態からそのような終局的な状態に至る過程が政策的に大きな意味を持つ。こうした移行期間の分析は、推計によるシミュレーションにたよらなければならない。

³ [Hirose1] Chap.6 の説明にある不満足な点をここで改善したいという意図もある。

⁴ 京都大学の泉正己教授からは「非負行列の数理 ペロン・フロベニウスの定理の周辺」と題した資料をいただき、本稿の執筆の参考にさせていただいた。ここに記して感謝したい。

レスリー行列が時間に依らない人口モデル,

$$l(t+1) = Al(t),$$

ここに,

$$l(t) = \begin{pmatrix} l(0, t) \\ l(1, t) \\ \vdots \\ l(99, t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{15} & b_{16} & \cdots & b_{49} & \cdots & 0 & 0 \\ p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_{98} & 0 \end{pmatrix}$$

を考える. このとき, 十分大きな t において $l(x, t)$ は安定人口

$$P_S(x, t) = N(t) \cdot C(x),$$

ここに

$$N(t) = Nr^t \quad (N, r \text{ は正の定数}),$$

$$C(x) = r^{-x} l_x / Z$$

($l_x = l_0 p_0 p_1 \cdots p_{x-1}$; $l_0 = 100,000$; Z は $C(x)$ の総和が 1 となるように定めた規格化定数)

に漸近的に等しい. すなわち,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(x, t)}{N(t)} = \frac{P_S(x, t)}{N(t)} = C(x).$$

さらに, 人口増加率 $r > 0$ はレスリー行列 A のみによって定まる.

まず, 次の予備的な考察を行う. t 年における出生数を B_t で表わす. すなわち, $B_t = l(0, t)$. 死亡率は一定としているので, 十分大きな t に対して,

$$l(x, t) = B_{t-x} \frac{l_x}{l_0}$$

が一般に成立している. ここで, もし「 B_t が一定の率 $r > 0$ で増加または減少する」と仮定すると, $B_t = B_0 r^t$ であるから,

$$l(x, t) = \frac{B_0}{l_0} r^{t-x} l_x$$

となり、定数を適当に調節すれば定理に述べた安定人口となっている。特に、 $r=1$ のときには定常人口となっていることに注意。

元の問題に戻ると、上の考察から、正の実数 $C, r > 0$ が存在して

$$B_t \sim Cr^t \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{すなわち,} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B_t/r^t = C$$

となることがいえれば定理が従うことがわかる。以下ではこの事実を示すことを目標とする。長くなるので、いくつかのステップに分けて示す。

ステップ 1 : B_t がみたす方程式

レスリー行列 A は 100 次の正方行列であるが、その 50 次の首座小行列（第 1～50 行と第 1～50 列から成る小行列）を A_0 とする。ここでは A_0 をレスリー小行列と仮に呼ぶことにする。記号をみやすくするために、

$$A_0 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$$

とかく。ただし、 $n = 50$ で

$$\begin{cases} b_k = 0 & (0 \leq k \leq 14) \\ b_k > 0 & (15 \leq k \leq 49) \\ p_k > 0 & (0 \leq k \leq 49) \end{cases}$$

となっている。 A_0 は A の $b_k > 0$ なる成分を全て含む最小の首座小行列となっている。上の記号を用いれば、人口推計モデルから、 B_t は次の n 階線型差分方程式をみたす：

$$B_t = b_0 B_{t-1} + b_1 p_0 B_{t-2} + b_2 p_0 p_1 B_{t-3} + \cdots + b_{n-1} p_0 p_1 \cdots p_{n-2} B_{t-n}.$$

この差分方程式の特性多項式は行列 A_0 の固有多項式に一致し、

$$\phi(\lambda) = \lambda^n - b_0 \lambda^{n-1} - b_1 p_0 \lambda^{n-2} - b_2 p_0 p_1 \lambda^{n-3} - \cdots - b_{n-1} p_0 p_1 \cdots p_{n-2}$$

で与えられる。

ステップ 2 : フロベニウス根の存在

この特性多項式 $\phi(\lambda)$ は唯一つの正の実単根をもつことを示す。 $\phi(\lambda) = 0$ の先頭項のみ残して移項して両辺を λ^n でわると、

$$1 = b_0\lambda^{-1} + b_1p_0\lambda^{-2} + b_2p_0p_1\lambda^{-3} + \cdots + b_{n-1}p_0p_1 \cdots p_{n-2}\lambda^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} k(\lambda)$$

となる. ここで $k(\lambda)$ は $\lambda > 0$ において単調に減少する関数で, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} k(\lambda) = \infty$ かつ $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} k(\lambda) = 0$ (λ^{-n} の係数は正で, その他の項の係数は非負であることに注意). したがって, $k(\lambda) = 1$ は正の実数の範囲で唯一の単根 $\lambda = r > 0$ をもつ. これが行列 A_0 の所謂フロベニウス根であることを示すのが次のステップであるが, そのためには少し準備が必要になる.

ステップ3: 非負行列の性質とその有向グラフによる解釈

定義.

- 1) 正方行列 M が非負行列であるとは, 行列 M のすべての成分が非負であることをいう.
- 2) n 次 ($n \geq 2$) の非負行列 M が分解不能 (あるいは強連結) であるとは,

$$\text{任意の } i, j \ (1 \leq i, j \leq n) \text{ に対して, 自然数 } k > 0 \text{ が存在して, } (M^k)_{ij} > 0$$

となるときをいう. ここに $(M^k)_{ij}$ は, 行列 M^k (M の k 乗) の (i, j) 成分.

- 3) n 次 ($n \geq 2$) の非負行列 M が原始的 (あるいは非周期的) であるとは,

$$\text{自然数 } k > 0 \text{ が存在して, 任意の } i, j \ (1 \leq i, j \leq n) \text{ に対して, } (M^k)_{ij} > 0$$

となるときをいう.

これからわかるように, ある非負行列 M が原始的ならば M は分解不能であるが, 逆は成立しない. 実際, 原始的であるということは分解不能ということに比べてずっと強い条件である.

非負行列の分解不能性や原始性は, 次に示すようにグラフ理論的に解釈される. いま, n 次 ($n \geq 2$) の非負行列 M を考える. n 個の状態を表す頂点を用意する. それらを $\{1, 2, \dots, n\}$ とかこう. いま, $M_{ij} > 0$ のとき頂点 j から頂点 i に向かう辺 $j \rightarrow i$ を描くことにする. このようにして, 非負行列 M から一つの有向グラフ $g(M)$ が構成される¹.

このとき, $(M^k)_{ij} > 0$ という条件は,

$$\text{自然数 } 1 \leq i_0, i_1, i_2, \dots, i_k \leq n \ (i_0 = i, i_k = j) \text{ が存在して, } M_{i_0 i_1} M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_{k-1} i_k} > 0$$

ということと同値であるから, 上に述べた非負行列の分解不能性の定義は次のように言い換えられる.

¹ 実際, 有向グラフで表わされる対象 (例: マルコフ連鎖, インターネットの情報検索, デインキン図形) に対して, 頂点間のつながりを表現する非負行列 (隣接行列) を定めて線型代数を使う手法が広く応用されている.

2') 非負行列 M が分解不能であるとは、有向グラフ $g(M)$ が強連結のとき、すなわち、

任意の頂点 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、 $g(M)$ の辺を(向きに沿って)経路して i から j に行くことができる

ときである。

いま、強連結な有向グラフを考える。このグラフの一つ頂点から出発して辺を経路して自分自身に戻ってくる経路をその頂点におけるサイクルと呼ぶことにする。このとき、各頂点における全てのサイクルの長さ(各辺の長さを1とみなす)の最大公約数は、頂点によらず一つの値に定まる¹。その共通の値をこの有向グラフの周期と呼ぶ。この概念を用いれば、上に述べた非負行列の原始性の定義は次のように言い換えられる。

3') 非負行列 M が原始的であるとは、有向グラフ $g(M)$ が強連結かつその周期が1のときである²。

ステップ4: ペロン・フロベニウスの定理

次数2以上の非負行列 M が分解不能であるとき、以下が成り立つ。

- 1) M は正の実数の重複度1の固有値 $r > 0$ をもつ。 r は M のフロベニウス根と呼ばれる。さらに、 r に属する固有ベクトルで成分が全て正であるものがとれる。
- 2) $\lambda \in \mathbb{C}$ が M の任意の固有値ならば、 $|\lambda| \leq r$ 。
- 3) さらに M が原始的であるとき、 $\lambda \in \mathbb{C}$ が r と異なる M の固有値ならば、 $|\lambda| < r$ 。

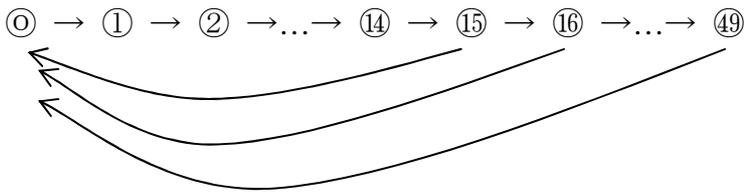
この定理の証明については、例えば、岩堀長慶『線型不等式とその応用』(岩波講座基礎数学, 1977)「第6章 非負行列」参照。

ステップ5: レスリー小行列 A_0 の原始性

ステップ3で述べた方法でレスリー小行列 A_0 に関する有向グラフを構成すると次の様になる:

¹ 実際、強連結性の仮定より、この有向グラフの任意の頂点 x, y に対して、それらを相互に結ぶ経路 v, w が存在する。いま、 y における任意のサイクル C をとると、 v と w の結合、 v と C と w の結合は x におけるサイクルになるから、 x におけるサイクルの長さの最大公約数は C の長さを割り、したがって、 y におけるサイクルの長さの最大公約数を割る。両者の役割をとり替えて逆もいえる。

² 証明の概略のみ示す。3) \Rightarrow 3') : 強連結性は、任意の2頂点をつなぐ長さ k の経路が存在することから従う。さらに、任意の頂点には長さ k と $k+1$ のサイクルがあることから周期1であることができる。3') \Rightarrow 3) : 十分大きな自然数 k をとれば、任意の頂点 x, y に対して x から y に至る長さ k の経路があることをいう。頂点 z を一つ固定する。 z にはその長さの最大公約数が1となる有限個のサイクルがある。ここで「最大公約数が1となる有限個の自然数の非負整数係数の一次結合で表わされる数は、ある下限となる自然数(たとえば与えられた有限個の自然数の積ととれば十分)以上の全ての自然数の値をとる。」という整数に関する補題を用いる。この補題を上 z のサイクルたちの長さに適用して定まる下限を L とし、 $k = 2n + L$ とおく。ここで、① x から z に行く経路、② z から出て z に戻るいくつかのサイクルの和、③ z から y に行く経路、の結合を考えると、①と③の長さはそれぞれ n より小さいので、 k から①の長さ n と③の長さ n を引いたものは L 以上である。よって、補題より、②のサイクルの和の長さがこの差に等しくなるようにとれる。



上の図で、各頂点は年齢を表わし、右向きの各矢線はある年齢から次の年齢に生存する推移を、また、左向きの0歳を終点とする矢線たちは再生産によるつながりを表わしている。

このグラフは明らかに強連結。また、例えば0歳の頂点から出る最短のサイクルと次に短いサイクルの長さはそれぞれ16と17で、これらは互いに素であるから、このグラフの周期は1である。（なお、元のレスリー行列 A では49歳以降にも右方向に矢線が伸びるので、グラフは強連結にならないことに注意）。

ステップ6：証明の完結

以上を総合して、定理の証明が以下のように完結する。まず、線型差分方程式の理論から、 B_t の一般解は次のように固有値の t 乗の線型結合で表わすことができる：

$$B_t = C r^t + \sum_{\lambda \text{ は } r \text{ と異なる固有値}} D_\lambda(t) \lambda^t.$$

ここに $D_\lambda(t)$ は t の多項式でその次数は λ の重複度マイナス1に等しい。なお、上で r が単根であることを用いた。

次に、レスリー小行列 A_0 は原始的ゆえ、ペロン・フロベニウスの定理1)より、フロベニウス根をもつ。一方、これは、ステップ2で存在を示した唯一の正の実単根の固有値 r 以外にはない。

さらに、ペロン・フロベニウスの定理3)より、フロベニウス根 r はその他の固有値の絶対値よりも大きい。したがって、 t が無限大の極限では、上の B_t の一般解の右辺において第1項が主要項となる。すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_t / r^t = C > 0$$

であり、これが示すべきことであった。（証明終）。

注意1. 定理の証明にジョルダン標準形を用いるアプローチもある（ただし上と同様、人口を50歳未満と以上で分割して前者の人口のみを考える。後者については生存率を適用するだけでよい。）。その場合、どのような初期人口ベクトルから出発しても、それをレスリー小行列 A_0 のジョルダン標準形の基底で表して A_0 を次々に作用させていくと、フロベニウス根に属する（1次元の）固有空間に分解されたベクトルが漸近的に主要項となる。フロベニ

ウス根に属する固有ベクトル（ペロン・フロベニウスの定理 1)より全成分が正のものがとれる）が安定人口である。

注意 2. $r > 1$ すなわち長期的に人口が増加する条件は、ステップ 2 の議論を振り返れば、 $k(1) > 1$ で与えられるが、

$$k(1) = b_0 + b_1 p_0 + b_2 p_0 p_1 + \cdots + b_{n-1} p_0 p_1 \cdots p_{n-2}$$

は純再生産率と呼ばれる出生力の指標に他ならない（今の場合、年齢別の生存率も出生率も時間によらず一定としているのでコーホートでみた生涯平均女兒出生数と一致する）。したがって、純再生産率が 1 より大きいとき長期的に人口は増加し、逆に、純再生産率が 1 より小さいとき長期的に人口は減少する。この結果は、男女を総計した人口に対しては、合計特殊出生率（一時点における年齢別（男女児）出生率の総和）と人口置換水準（約 2.1）の大小関係が長期的な人口の増減を決定すると述べることができる。

注意 3. 一定の年齢別死亡率の下で純再生産率が 1 となるような年齢別出生率を一組固定したとする。このとき $r = 1$ だから十分時間が経過したときに人口は定常人口に近づく。この定常人口の総数 $N = \sum_{x=0}^{99} P_S(x, t)$ と初期人口の総数 $L_0 = \sum_{x=0}^{99} l(x, 0)$ の比 $M = N/L_0$ を人口モメンタムと呼ぶ。人口モメンタムが 1 より大きく出生力が人口置換水準より高い国の場合、出生力が人口置換水準まで低下しても人口増加はしばらく持続して、最終的におちつく人口の規模は当初人口の規模よりも大きくなる。このように人口モメンタムは人口成長の慣性を表わす。

日本の場合、人口モメンタムの値は 1996 年に 1 を割ったと推計されている。日本では 1964 年以降合計特殊出生率は人口置換水準を下回って推移しているにもかかわらず、2005 年まで人口が減少しなかったのは、死亡率の持続的な低下に加えて人口モメンタムの効果が働いていたからである。現在（2010 年代初頭）の日本では、人口モメンタムの値は 1 より小さく合計特殊出生率も人口置換水準より低いので、合計特殊出生率が速やかに人口置換水準に回復すると仮定しても最終的な人口規模は（国際移動の影響を考えなければ）現在の人口規模よりも小さくなる。

第6章 所得分布分析の方法¹

所得分析や貧困分析において用いられる方法は、確率論や統計学の概念を用いて明確に述べることができる。この章では、所得分布を表現する手段の一つであるローレンツ曲線と不平等度の指標の一つであるジニ係数を中心に紹介する。

6.1 所得分布のモデル

我々が実際に目にする所得分布は、単峰であるが平均に関して対称ではなく、ピークが左側（低所得側）に寄り、右側（高所得側）に裾をひいた形状をしていることが多い。このような性質を持った分布の一例として、対数正規分布があげられる。

例6.1 対数正規分布 正の実数値をとる確率変数 X がパラメータ (m, σ^2) の対数正規分布に従うとは、 $\log X$ が平均 m 、分散 σ^2 の正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うときであると定義する。ここに、 \log は自然対数。パラメータ (m, σ^2) の対数正規分布を $LN(m, \sigma^2)$ とかく。

対数正規分布に関する基本的な量は以下のとおり：

$$\text{分布関数} : \Lambda(x; m, \sigma) = \Phi\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)$$

$$\text{確率密度関数} : \lambda(x; m, \sigma) = \phi\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma x}$$

（ここに $\Phi(x)$, $\phi(x)$ は、各々、標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数および確率密度関数。）

$$\text{平均} : E[X] = \exp(m + \frac{1}{2}\sigma^2)$$

$$\text{分散} : V[X] = \exp(2m + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$$

$$\text{中央値} = \exp(m)$$

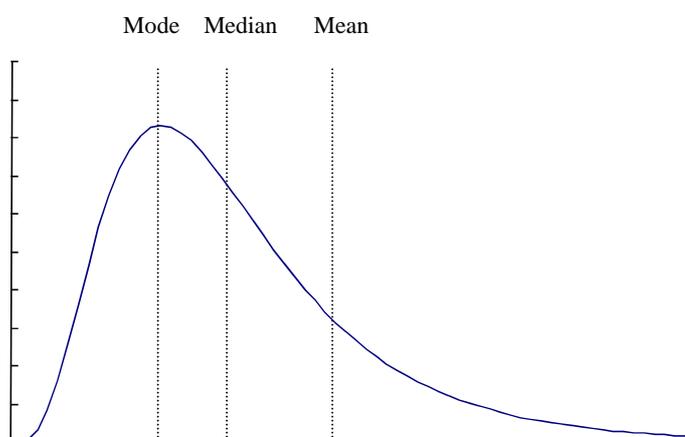
$$\text{最頻値} = \exp(m - \sigma^2)$$

$$\text{歪度}^2 = (\exp(\sigma^2) + 2)(\exp(\sigma^2) - 1)^{1/2}.$$

¹ 本章は[Hirose1] Chap 8. と Chap 9. に基づく。

² 一般に、確率変数 X の歪度は、 $E\left[\left(\frac{X-E[X]}{\sqrt{V[X]}}\right)^3\right]$ で定義される。歪度は分布の非対称度を表す。

図 6.1 対数正規分布のグラフ



対数正規分布では、歪度は正であり、最頻値<中央値<平均 となっている。

6.2 ローレンツ曲線

ローレンツ曲線¹ (Lorenz curve) は所得分布を表現する一つの手段である。ローレンツ曲線とは、所得の低い順から、人口の累積割合とその人口の所得の累積割合をそれぞれx軸値, y軸値にとる点をプロットして出来るグラフのことである。

すなわち、ある所得分布のローレンツ曲線とは、その分布の確率密度関数 $f(t)$ が与えられたとき、各所得値 $t \geq 0$ について、

$$\begin{cases} x = x(t) = \int_0^t f(s)ds \\ y = y(t) = \frac{1}{m} \int_0^t sf(s)ds \end{cases}$$

(ここに、 m はこの分布の平均) で定まる点 (x, y) 全体の集合である。上式は、ローレンツ曲線のパラメータ表示を与えている。パラメータを消去すると、

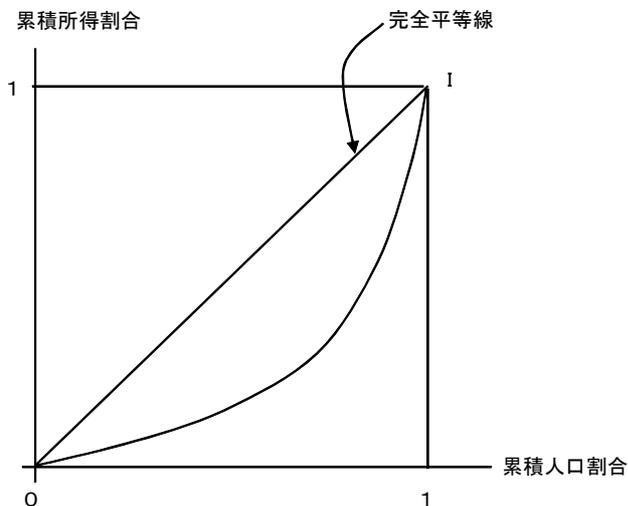
$$y = \frac{1}{m} \int_0^x F^{-1}(u)du \stackrel{\text{def}}{=} l(x)$$

なる関数表示を得る。ここに $F(t)$ は分布関数。(パラメータ表示で、 $u = F(s)$ と変数変換すれば、 $du = dF(s) = f(s)ds$, また F^{-1} が存在するとして $s = F^{-1}(u)$ となることから関数表示が従う。)

¹ 米国の統計学者Max Otto Lorenz (1866-1959)が1905年に発表した論文 Methods of measuring the concentration of wealth (Publications of the American Statistical Association, Vol. 9, No.60, 1905, pp.209-219) で用いたことに因む。オリジナルでは所得の累積割合をx軸に、人口の累積割合をy軸にとっている。また、1916年に出版された河上肇著『貧乏物語』(現在岩波文庫で入手できる)においてもローレンツ曲線を用いた貧富の格差の分析が行われている。

図 6.2 は、ローレンツ曲線の例を示す。これから、ローレンツ曲線は一般に x - y 平面の原点 $O(0,0)$ と $I(1,1)$ を両端に持ち、第 1 象限の正方形 $[0,1] \times [0,1]$ の対角線 OI の下側の三角形の内部を通過するグラフである。所得分布の両極端のケースを考えよう。格差が完全になく全員が同額の所得を得ている社会では、ローレンツ曲線は傾き 1 の直線 OI になる。これを完全平等線と呼ぶ。他方、ひとにぎりの富裕層とその他全員の無所得者から成る社会の場合、ローレンツ曲線は原点から x 軸上を這うように水平に伸び、所得のある人口に達してから急激に増加して I に至る。この考察から、図形的にみて、不平等が大きい分布ほどローレンツ曲線は中央部が下方にたわんだ形状をしていることが見て取れる。

図 6.2 ローレンツ曲線の例



例 6.2 離散データのローレンツ曲線 いま、 N 世帯からなるグループの所得の標本値を収集したとする。これらの所得データを小さい順から並べたものを

$$0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_N$$

とし、その平均を $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ とおく。このグループの所得分布のローレンツ曲線は、各 $k = 0, 1, 2, \dots, N$ について $P_k = \left(\frac{k}{N}, \frac{1}{mN} \sum_{i=1}^k y_i \right)$ を順次線分で結んだ多角形になる。この例で、完全平等のケース： $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_N = m$ と一人が富を占有しているケース： $0 = y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_{N-1} < y_N = mN$ の各々の場合に、上で述べたローレンツ曲線の性質を確かめよ。

例 6.3 対数正規分布のローレンツ曲線 対数正規分布 $LN(m, \sigma^2)$ のローレンツ曲線の両端を除く部分は、以下のパラメータ表示：

$$\begin{cases} x = \Phi(t) \\ y = \Phi(t - \sigma) \end{cases}$$

で与えられる．ここに， $\Phi(x)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数で， t はすべての実数をわたる．両端は $t \rightarrow \pm\infty$ の極限值に等しい．[Hirose1] Chap. 9参照．

例 6.4 ガンマ分布のローレンツ曲線 ガンマ分布の確率密度関数は $x > 0$ に対して

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad (\alpha, \beta > 0 \text{ はパラメータ})$$

で定められる ($\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数)．この分布の平均 $=\alpha/\beta$ ，分散 $=\alpha/\beta^2$ である．この分布のローレンツ曲線は，パラメータ表示：

$$\begin{cases} x = \frac{\gamma(\alpha, \beta t)}{\Gamma(\alpha)} \\ y = \frac{\gamma(\alpha + 1, \beta t)}{\Gamma(\alpha + 1)} \end{cases}$$

($t \geq 0$)で与えられる．なお端点 $I(1,1)$ は $t \rightarrow \infty$ の極限值に等しい．ここで， $\gamma(\alpha, t) = \int_0^t s^{\alpha-1} e^{-s} ds$ は (第1種) 不完全ガンマ関数である．[Hirose1] Chap. 8参照．

6.3 所得分布とローレンツ曲線の対応

以上の例をふまえて，所得分布のローレンツ曲線を一般的に定義しよう．そのためにいくつかの記号を導入する．

まず，何らかの (実数値をとる) 確率変数の分布関数となりうる関数のクラスを

$$C = \left\{ F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] ; \begin{array}{l} \text{① } F(x) \text{ は 単調増加} \\ \text{② } F(x) \text{ は 右連続} \\ \text{③ } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \end{array} \right\}$$

とおく．確率論で知られているように，任意の確率変数 X に対して， $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$ は C に属する．逆に，各 $F \in C$ に対して， $F(x)$ を分布関数とする確率変数 X_F が存在する．すなわち $\Pr(X_F \leq x) = F(x)$ ¹．

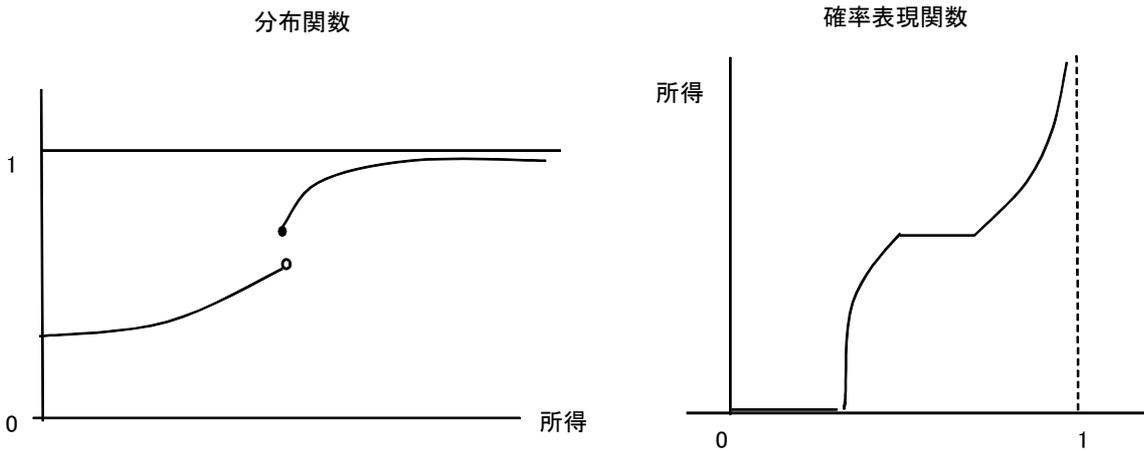
$F \in C$ に対して， $F^b(t) = \inf \{x; F(x) \geq t\}$ ($0 < t < 1$)なる関数を導入し， $F^b(t)$ をその分布の確率表現関数(probability representing function)²と呼ぶ． F^{-1} が存在するときには F^b は F^{-1} に一致する． $F^b(t)$ はいわゆるパーセンタイル値 (分位値) である．例えば， $F^b(1/2)$ はその分布の中央値に他ならない．図 6.3 参照．

¹ 例えば，西尾真喜子『確率論』(実教出版，1978)，三章，§2，定理2参照．

² この用語は森口繁一『確率表現関数』(UP応用数学選書，東京大学出版会，1995)による．なお，同書第2章「所得の分布」では，ローレンツ曲線が累積分け前(cumulative share)という名称で定義されている．

実際、 $X_F(t) = F^b(t)$ とおいたものが、確率空間(0,1) (正確には、区間(0,1)にBorel集合族とLebesgue測度を付与した確率空間) の上で定義された確率変数で F を分布関数とするものを与えている。以下、 C の元を確率変数と同一視する際には、この対応によるものとする。従って、 X_F と F^b は同一のものであるが、確率変数とみるときには前者、関数とみるときには後者の記号を用いる。

図 6.3 分布関数と確率表現関数



さらに、非負実数値をとる確率変数が所得分布を表現するものとして、その分布関数のクラスである C の元で台が非負実数に含まれる関数の全体

$$R = \{F \in C ; \text{supp } F \subseteq [0, \infty)\}$$

をとる。

定義. (ローレンツ曲線)

R に属する分布関数 $F(x)$ に対し、 $I_F(x) = \int_0^x F^b(t)dt$ とおく。このとき、この分布のローレンツ曲線を $\varphi_F(x) = I_F(x)/m$ ($0 \leq x \leq 1$) で定める。ここに、 $m = I_F(1)$ はこの分布の平均。

この定義は、はじめに述べたローレンツ曲線の定義と整合的であることを注意しておく。すなわち、分布関数 $F(x)$ が確率密度関数を持つ場合や逆関数を持つ場合には、前述のパラメータ表示や関数表示はこの一般的定義の特別な場合にあたる。

一方、先に行なった考察をもとに、ローレンツ曲線となりうる関数のクラスを、

$$L = \left\{ l: [0, 1] \rightarrow [0, 1] ; \begin{array}{l} \text{① } l(x) \text{ は } [0, 1] \text{ で連続, かつ, } l(0) = 0, l(1) = 1 \\ \text{② } l(x) \text{ は } [0, 1] \text{ で凸} \\ \text{③ } l(x) \text{ は } [0, 1] \text{ で単調増加} \end{array} \right\}$$

と定める.

このとき, 次の基本定理が成り立つ.

定理.

$F \in R$ に対し φ_F を定める対応は, 写像¹ $\varphi : R \rightarrow L$ を定め, φ は以下の性質を満たす.

1) φ は全射.

2) φ は次の意味で連続. すなわち, R に属する分布の列 $\{F_n\} \subset R$ があって対応する確率変数の列 $\{X_{F_n}\}$ がある $F \in R$ に対応する確率変数 X_F に $(0,1)$ 上殆ど至るところ収束するとき, 関数列 $\{\varphi_{F_n}\}$ は φ_F に $[0, 1]$ 上一様収束する.

3) もし $\varphi_{F_1} = \varphi_{F_2}$ ならば, $m_1, m_2 \geq 0$ が存在して, $F_1(m_1x) = F_2(m_2x)$. すなわち, 一つのローレンツ曲線に対応する分布は独立変数の相似変換の不定性を除き一意的に定まる.

証明は, [Hirose1] Chap. 8 を見よ.

この定理により, 平均を一つ固定した所得分布 (例えば, R の元で平均が 1 のもの全体) と L の元との間に一対一対応があることがわかる.

6.4 ジニ係数

不平等度の指標として広く用いられているジニ係数は, ローレンツ曲線を通してみるとその図形的意味がわかりやすい. ジニ係数 G は, ローレンツ曲線と完全平等線が囲む面積と単位正方形の右下半分の三角形の面積との比として定義される. したがって,

$$G = \left(\frac{1}{2} - \int_0^1 l(x) dx \right) : \frac{1}{2} = 1 - 2 \int_0^1 l(x) dx.$$

定義から, ジニ係数 G は $0 \leq G < 1$ の値をとる. ジニ係数が 0 に近いときは完全平等に近く, ジニ係数が 1 に近いときは貧富格差が大きいと推測される.

例 6.5 離散データのジニ係数 例 6.2 の離散データのジニ係数は,

$$G = \frac{2}{N^2 m} \sum_{i=1}^N i y_i - \left(1 + \frac{1}{N} \right)$$

で与えられる.

¹ 筆者は[Hirose1] Chap.8でこの写像をローレンツ写像 (Lorenz mapping) と呼んだ.

例 6.6 対数正規分布のジニ係数 対数正規分布 $LN(m, \sigma^2)$ のジニ係数は,

$$G = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 1$$

で与えられる. ここに, $\Phi(x)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数. [Hirose1] Chap. 9 参照. これより, 対数正規分布のジニ係数はパラメータ m (m は平均ではないことに注意) によらない.

例 6.7 ガンマ分布のジニ係数 例 6.4 のガンマ分布のジニ係数は, 同値な表現により,

$$G = \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{2^{2\alpha}\Gamma(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{2^{2\alpha-1}\alpha B(\alpha, \alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + 1)}$$

とかける ($B(\alpha, \beta)$ はベータ関数). [Hirose1] Chap. 8 参照.

問題. 上の例以外にも, 解析的表示が知られた分布に対してローレンツ曲線およびジニ係数を計算せよ.

問題. $\Delta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - y| dF(x) dF(y)$ とおく. このとき $G = \frac{\Delta_1}{2m}$ が成り立つことを示せ. またこの関係式を離散データの場合に書き直せ.

6.5 所得分布の比較

ローレンツ曲線とジニ係数を用いて, 所得分布を不平等の観点から比較する問題を考える. すなわち, 所得分布 (厳密には所得分布の分布関数) の全体 R に不平等の度合いに関する順序 (ランキング) の構造を入れよ, という問題である.

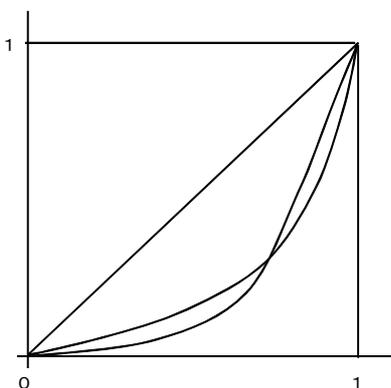
いま二つの所得分布 $F_1, F_2 \in R$ をとり, それらのローレンツ曲線を $l_1, l_2 \in L$, ジニ係数を $G_1, G_2 \in [0,1)$ とする. このとき, 不平等度に関して次の二種類の順序関係が定義される.

$$F_1 \geq_L F_2 \Leftrightarrow l_1(x) \leq l_2(x) \quad (\forall x \in [0,1]),$$

$$F_1 \geq_G F_2 \Leftrightarrow G_1 \geq G_2.$$

これらの順序関係に関して, 以下が成り立つ.

- (1) $F_1 \geq_L F_2$ ならば $F_1 \geq_G F_2$ である. しかし, 逆は成り立たない.
- (2) 明らかに \geq_G は全順序であるが, \geq_L はそうではない. 図 6.4 のように交差する二つのローレンツ曲線は \geq_L の意味では比較不可能である.

図 6.4 \geq_L で比較不可能なローレンツ曲線の例

例 6.8 対数正規分布の比較 F_i は対数正規分布 $LN(m_i, \sigma_i^2)$ に従うとする ($i=1, 2$) . 先に求めた対数正規分布のローレンツ曲線とジニ係数から, 次の事実が従う¹ :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \Leftrightarrow F_1 \geq_L F_2 \Leftrightarrow F_1 \geq_G F_2.$$

6.6 所得再分配と貧困分析への応用

所得課税(income taxation)とは, 各所得値 (または所得階級) に対する税率を定めた規則といふことができる. その規則を課税前の所得分布に適用した結果, 課税後の所得分布が得られたとする. すなわち, ある所得分布 $F \in R$ ともう一つの所得分布 $T(F) \in R$ があって, $X_F(t) \geq X_{T(F)}(t)$ ($\forall t \in (0,1)$) となっているとき (ここに, $X_F(t) = F^b(t)$ は確率表現関数), F を課税前の所得分布, $T(F)$ を課税後の所得分布, $E[X_F(t)] - E[X_{T(F)}]$ を税額とみることができる.

また, $F \in R$ に対して, もう一つの $T(F) \in R$ があって, $E[X_F(t)] = E[X_{T(F)}]$ となっているとき, F を所得再分配前の所得分布, $T(F)$ を所得再分配後の所得分布とみることができる.

なお, 実際問題としては所得の補足, 徴税や再配分には多額のコストが伴うが, ここではそれらは一切考慮していない.

(1) 所得再分配や課税が所得分布に与える影響

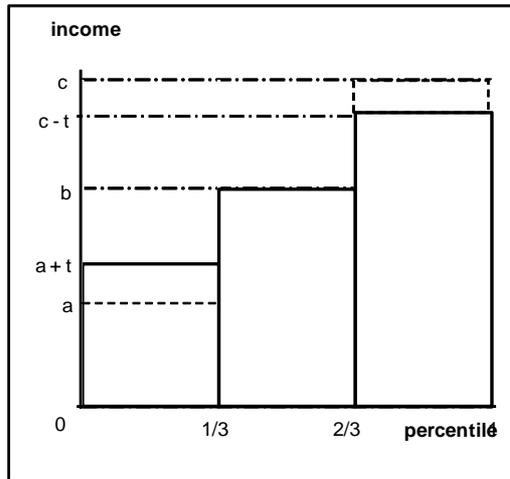
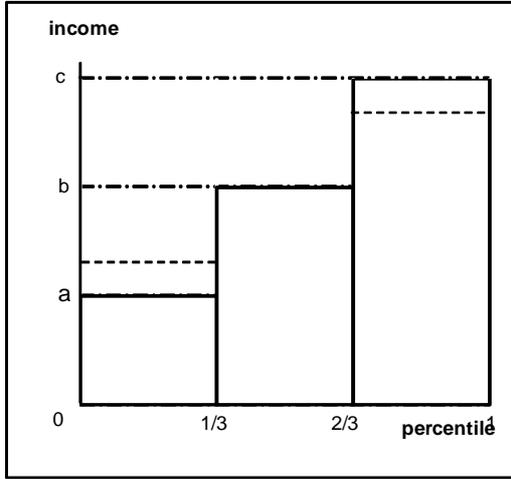
この本質をみるために, 事前の所得分布として, 低・中・高の三つの所得階級がそれぞれ1/3ずつからなる集団を考える. 図 6.5 は, 以下の三つの場合に所得分布がどう変わるかをローレンツ曲線で示したものである.

- (i) 高所得層から低所得層へ所得再分配を行う場合
- (ii) 各所得層の定額の課税を行う場合
- (iii) 累進税率による課税を行う場合

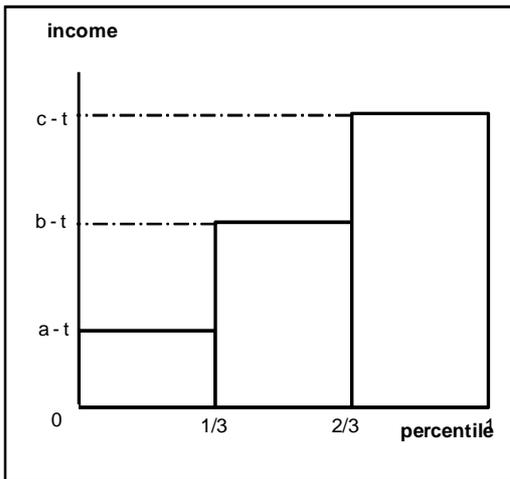
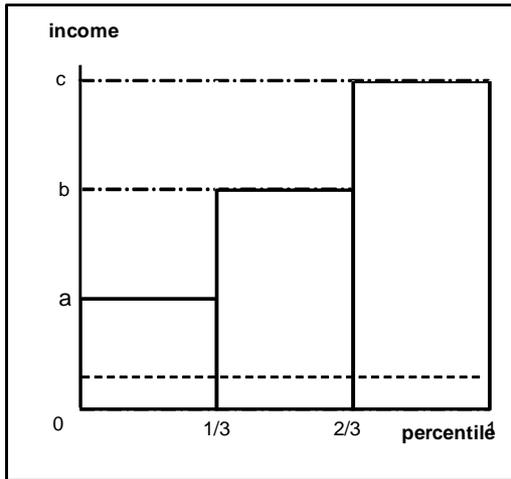
¹ この事実から, 所得分布を対数正規分布で近似して比較する場合, 図 6.4 のようにローレンツ曲線が交差する場合を含み得ないことがわかる.

図 6.5 所得再分配, 定額課税, 累進課税が所得分布に与える影響

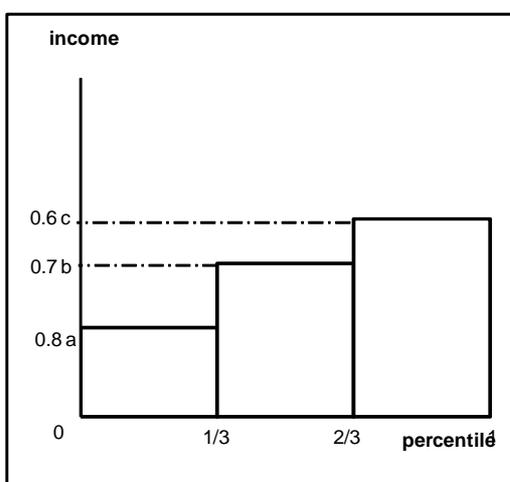
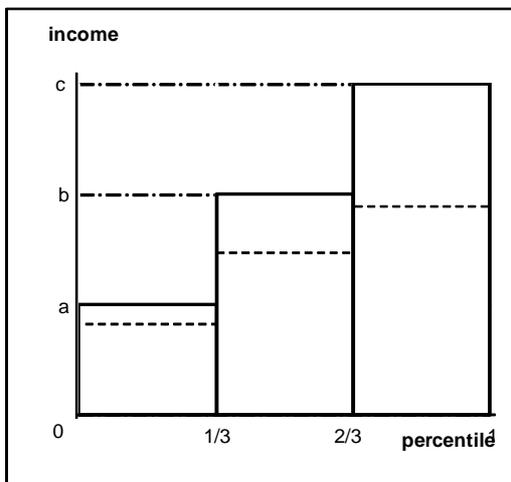
(i) 所得再分配



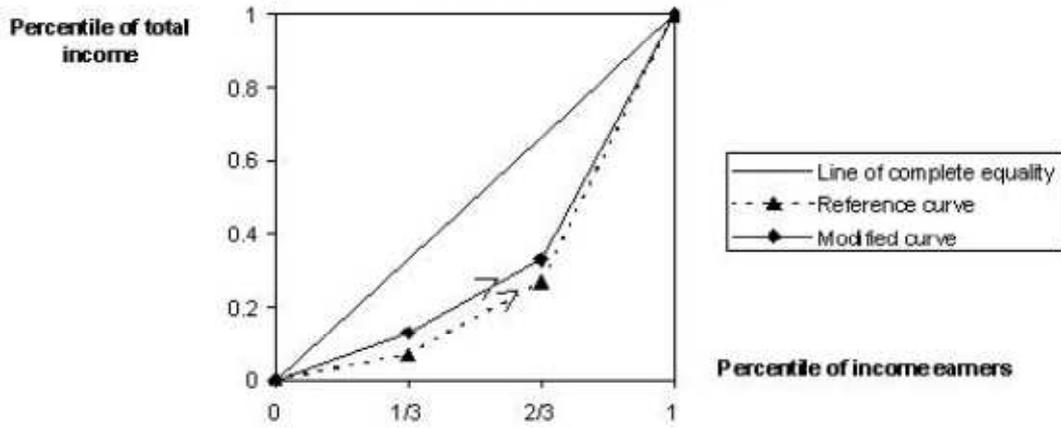
(ii) 定額課税



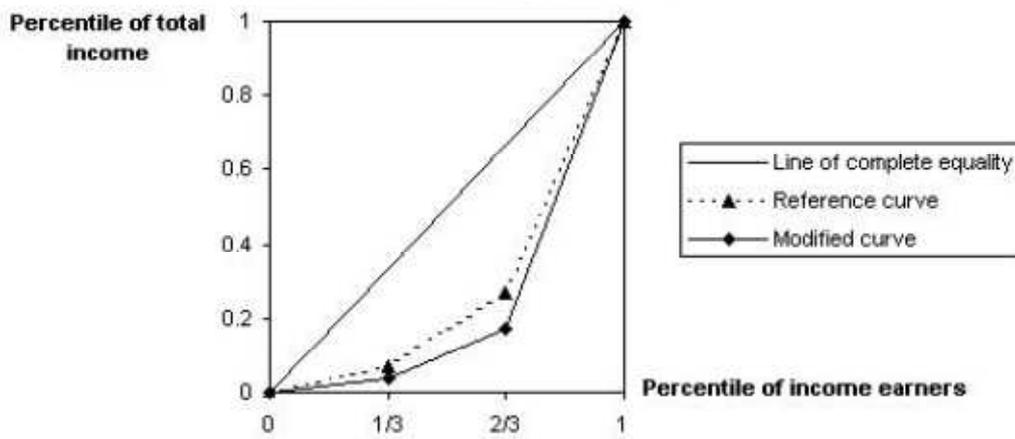
(iii) 累進課税



(i) 所得再分配の効果



(ii) 定額課税の効果



(iii) 累進課税の効果

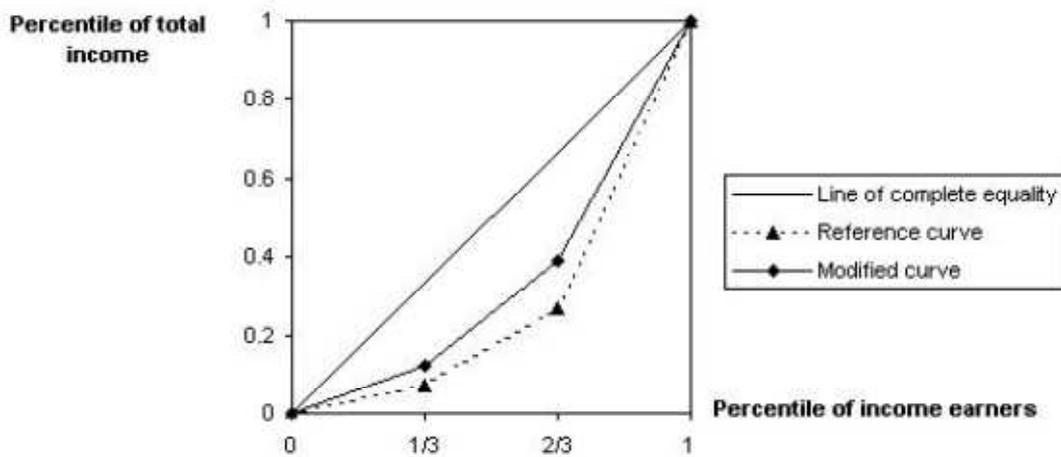


図 6.5 からわかるように、(i)と(iii)の場合、事後の所得分布のローレンツ曲線は初期分布のローレンツ曲線の上方に位置し、(ii)の場合はその反対の位置関係になる。したがって、前節で定義した順序 \geq_L の意味で、高所得から低所得への所得再分配や累進課税は所得の不平等を抑制し、逆に、全国民への一律定額の課税は不平等を拡大する結果をもたらすことがみてとれる。

(2) 貧困に関する指標

貧困を定義するには所得、健康、栄養、教育など様々な条件を考慮する必要があるが、ここでは所得が一定の水準（貧困線）以下の状態とする。例えば、1日1ドル以下の所得で生活している者は絶対的貧困にあるとされ、この人口比率を2015年までに1990年の水準から半減させることが、2000年の国連総会で採択されたミレニアム開発目標の第一の達成目標である。また、OECDは、全国民の等価可処分所得（世帯の可処分所得を世帯員数の平方根で割った値）の中央値の50%以下の所得の者を相対的貧困と定めて国際比較分析を行なっている。

貧困分析では、貧困人口割合（incidence of poverty）、貧困ギャップ（poverty gap）、貧困の厳しさ（severity of poverty）の三つの指標が主として用いられる。

所得分布 $F \in R$ に対応する確率変数 X_F を簡単のため Y と表すことにする。いま、貧困線 z （例えば1ドル/日）与えられたとする。このとき、所得のうち貧困線に不足する部分、

$$W = [z - Y]_+ = \begin{cases} z - Y & (Y \leq z \text{ のとき}) \\ 0 & (Y > z \text{ のとき}) \end{cases}$$

を用いて、上記の指標は以下のように定義される。

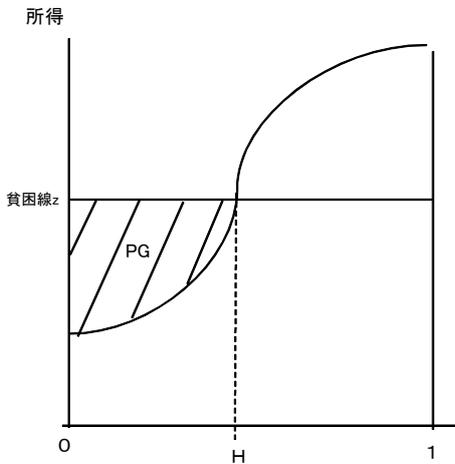
貧困人口割合： $H = F(z),$

貧困ギャップ： $PG = E \left[\frac{W}{z} \right],$

貧困の厳しさ： $SPG = E \left[\left(\frac{W}{z} \right)^2 \right].$

図 6.6 は最初の二つの指標（ H および PG ）を確率表現関数（パーセンタイル値）のグラフを用いて示したものである。とくに、貧困ギャップは、グラフの斜線部分の面積を貧困線 z を単位に表した値であり、貧困人口割合とともに貧困の深さにも依存している。また、 SPG は W の分散に関係していることがわかる。

図 6.6 貧困人口割合と貧困ギャップ



例 6.9 上で定義した貧困に関する三つの指標を離散データの場合について示す. N 世帯からなるグループの所得データを

$$0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_N$$

とする. 貧困線を z とし, $q = \max\{i; y_i \leq z\}$ とおく. すなわち, $y_q \leq z < y_{q+1}$ である. このとき, 次が成り立つ.

貧困人口割合: $H = \frac{q}{N},$

貧困ギャップ: $PG = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^q \frac{z - y_i}{z},$

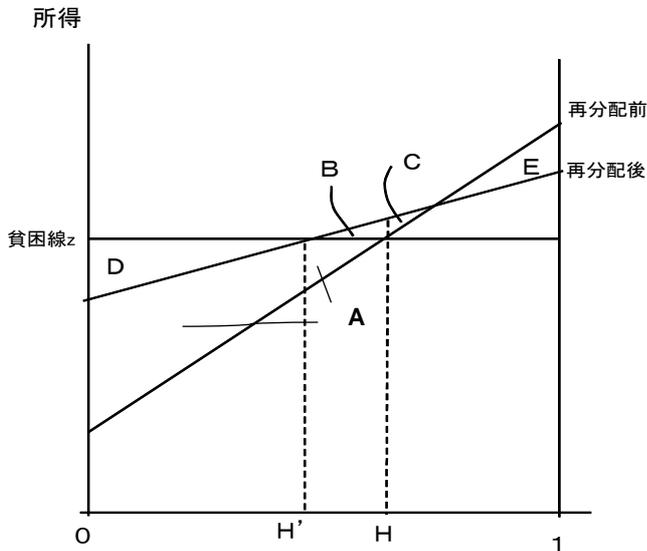
なお, $PG = H \left(1 - \frac{\mu}{z}\right),$ (ここに, $\mu = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q y_i$) となっていることに注意.

貧困の厳しさ: $SPG = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^q \left(\frac{z - y_i}{z}\right)^2.$

(3) 所得再分配による貧困削減とその効率性

図 6.7 は, 所得再分配プログラム (例えば公的扶助制度) の実施前後における所得分布の確率表現関数を貧困線とともに示したものである. 見やすくするために両分布を直線で示してある.

図 6.7 所得再分配による所得分布の変化



この図から、以下の事実が観察できる。

第一に、貧困人口割合は H から H' に減少し、貧困ギャップは $A+D$ から D に減少した。制度の目的達成の観点からは、 $D/(A+D)$ が小さくなることが求められる。

第二に、再分配により移転される所得の総額は $A+B+C (=E)$ で表されるが、このうち、 A は貧困ギャップの減少分、 B は貧困人口に貧困線を超えて移転された額、 C は貧困でない人口に移転された額である。制度の効率性の観点からは、 $B/(A+B+C)$ や $C/(A+B+C)$ が小さくなることが求められる。

なお、繰り返しになるが、ここでは所得移転に要する行政費用を全く無視していることを注意しておく。

例 6.10 上の状況を離散データの場合にみてみる。 N 世帯の集団についてその所得が、再分配の前後で

$$\text{再分配前： } 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_N$$

$$\text{再分配後： } 0 \leq y'_1 \leq y'_2 \leq y'_3 \leq \dots \leq y'_N$$

となったとする。ここで、 $\sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N y'_i$ である。また、貧困線を z とし、 $q = \max\{i; y_i \leq z\}$; $r = \max\{i; y'_i \leq z\}$; $s = \max\{i; y_i \leq y'_i\}$ とおく。

このとき、以下が成り立つ。なお、再分配前の値は(前)、再分配後の値は(後)と示した。

$$\text{貧困人口割合 (前) : } H = \frac{q}{N},$$

$$\text{貧困人口割合 (後) : } H' = \frac{r}{N},$$

$$\begin{aligned}
\text{貧困ギャップ総額 (前)} & : A + D = \sum_{i=1}^q (z - y_i), \\
\text{貧困ギャップ総額 (後)} & : D = \sum_{i=1}^r (z - y'_i), \\
\text{貧困人口への超過移転額} & : B = \sum_{i=r+1}^q (y'_i - z), \\
\text{非貧困人口への移転額} & : C = \sum_{i=q+1}^s (y'_i - y_i), \\
\text{総所得移転額} & : A + B + C = \sum_{i=1}^s (y'_i - y_i) = \sum_{i=s+1}^N (y_i - y'_i) = E.
\end{aligned}$$

付録.

年金額が拠出期間と（再評価後の）平均所得によって定まる給付建ての制度を考える．拠出期間 X が正規分布 $N(m_1, \sigma_1^2)$ に従い，平均所得 Y が対数正規分布 $LN(m_2, \sigma_2^2)$ に従うと仮定すると，それぞれを周辺分布にもつ2変数の同時分布の確率密度関数 $g(X, Y)$ を考えることには興味がある．結果のみを示すと次のとおり：

$$g(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{Y} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}R\right).$$

ここに，

$$R = \left(\frac{X - m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{X - m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{\log Y - m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{\log Y - m_2}{\sigma_2}\right)^2,$$

かつ， ρ は $|\rho| < 1$ をみたし， X と Y の相関係数を決めるパラメータ．詳細は，[Hirose1] Chap. 9参照．

参考文献

本書のもととなった文献は次の三つである。

[0] K. Hirose. *Actuarial mathematics in social protection (Theory)*. Notes based on lectures at Maastricht University 2002-2006.

これは、筆者が2002から2006年の各年にマーストリヒト大学で行った講義のノートである。本書の最初の四章(補論を除く)はこの講義ノートに基づく。英語の他、ロシア語版もある。

[1] K. Hirose. *Topics in quantitative analysis of social protection systems*. (Issues in Social Protection, Discussion Paper No.6). Social Security Department, International Labour Office. Geneva. 1999.

本書の第5.5節、第5.7節、第6章および第7章は、このレポートのいくつかの章を参考にした。本文では[Hirose1]と引用した。このレポートの章だてを以下に述べておく。

1. Financial Indicators and Systems of Financing of Social Security Pensions
2. On the Scaled Premium Method
3. A Relation Between the PAYG Contribution Rate and the Entry Age Normal Premium Rate
4. Natural Cubic Spline Interpolation
5. Sprague Interpolation Formula
6. An Interpolation of Abridged Mortality Rates
7. The Concept of Stable Population
8. Theory of Lorenz Curves and its Applications to Income Distribution Analysis
9. Note on Lognormal and Multivariate Normal Distributions
10. On Some Issues in Actuarial Mathematics.

また、本書第5.6節は

[2] K. Hirose (ed.). *Pension Reform in Central and Eastern Europe — in times of crisis, austerity and beyond*. ILO. Budapest. 2011.

の第1章の付録Aに基づく。

本文で述べた人口推計プログラムと年金給付費推計および財政見通し作成プログラムのマニュアルは次のとおりである。

[3] *The ILO population projection model — A technical guide*. The International Financial and Actuarial Service (ILO-FACTS), Financial, Actuarial and Statistical Services Branch, Social Protection Sector, International Labour Office. Geneva. 2001.

本文では[ILO-POP]と引用した。これには英語の他、仏語版、スペイン語版もある。

[4] *The ILO pension model — A technical guide*. The International Financial and Actuarial Service

(ILO-FACTS), Financial, Actuarial and Statistical Services Branch, Social Protection Sector, International Labour Office. Geneva. 1997.

本文では[ILO-PENS]と引用した。英語の他、スペイン語版もある。

以上の文献は全て

<http://labordoc.ilo.org>

または

<http://www.social-protection.org/gimi/gess/ShowLibrary.do?sid=3>

からダウンロード可能である(Search author=Kenichi Hirose)。できない場合はE-mailで筆者に請求してください (hirose@ilo.org)。

本書の内容に関連する日本語の文献として、以下の二著を掲げておく。

大滝勉『年金保険数学』 社団法人日本アクチュアリー会会報別冊第84号 1983.

太鼓地武・弓場美裕 「年金システムの数理」 『生命・生物科学の数理』 第4章 (岩波講座応用数学 [対象8]) 1993.