数学基礎試験問題　（2013 年度 第 2 回）　（解答例）

$\boxed{1}$ V, W を 1 変数 x のそれぞれ次数 3, 2 以下の実数係数多項式全体からなるベクトル空間とする．写像 $T : V \to W$ を

$$T(f)(x) = f''(x) - f'(2x-1)$$

と定めるとき，次の問に答えよ．

(1) T が線形写像であることを証明せよ．

(2) V, W の基底を選び，それらの基底に関する T の表現行列を求めよ．

(3) T の核と像の次元を求めよ．

(解答例) (1) $f, g \in V,\ r \in \mathbb{R}$ なら，

$$\begin{aligned}
T(f+g)(x) &= (f+g)''(x) - (f+g)'(x)(2x-1) \\
&= f''(x) + g''(x) - f'(2x-1) - g'(2x-1) \\
&= T(f)(x) + T(g)(x), \\
T(rf)(x) &= (rf)''(x) - (rf)'(2x-1) \\
&= rf''(x) - rf'(2x-1) = r(f''(x) - f'(2x-1)) \\
&= rT(f)(x)
\end{aligned}$$

となるので，T は線形写像である．

(2) $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$, $B_2 = \{1, x, x^2\}$ とすると，B_1, B_2 はそれぞれ V, W の基底である．B_2 に関する座標ベクトルを考え，

$$\begin{aligned}
&1 && \to 0 && \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&x && \to 0 - 1 = -1 && \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&x^2 && \to 2 - 2(2x-1) = -4x + 4 && \to \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&x^3 && \to 6x - 3(2x-1)^2 = -12x^2 + 18x - 3 && \to \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \\ -12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．よって，表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

この行列の行に関する標準形は $-1, -4, -12 \neq 0$ なので，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．この行列の階数は 3 なので, T の像の次元は 3 である．よって, $\dim T(V) = \dim W = 3$ である．次元公式より，$\dim \mathrm{Ker}(T) = 4 - 3 = 1$ である．

$\boxed{2}$ $a > 0$ とする．次の曲面 Σ の面積を求めよ．

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq a^2\right\}.$$

ただし，閉領域 D 上の C^1 級関数 $z = f(x, y)$ のグラフとして定まる曲面の面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2}\ dxdy$$

で与えられる．

（解答例） Σ は閉領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 上の関数

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$$

のグラフである．$f_x = x$，$f_y = y$ であるから，Σ の面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$

である．これは極座標変換によって次のように計算できる．

$$\begin{aligned} \iint_E \sqrt{1 + r^2}\ r\, dr d\theta \quad &= 2\pi \int_0^a \sqrt{1 + r^2}\ r\, dr = 2\pi \left[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a \\ &= \frac{2\pi}{3}\{(1 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 1\}. \end{aligned}$$

ここで $E = \{0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ である．

$\boxed{3}$　3 次対称群 S_3 から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ への全射群準同型は存在しないことを示せ.

(解答例 1)　全射準同型　$\varphi : S_3 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$　が存在したとすると，$\operatorname{Ker}\varphi$ は S_3 の正規部分群で, $|\operatorname{Ker}\varphi| = |S_3|/3 = 2$ となる．2 は素数なので, ラグランジュの定理より, $\operatorname{Ker}\varphi$ は位数 2 の元で生成される．S_3 において位数 2 の元は互換なので，$\operatorname{Ker}\varphi$ は互換で生成される部分群となる．必要なら順番を入れ替えて $\operatorname{Ker}\varphi = \langle(1,2)\rangle$ としてよい．しかし，$(2,3)^{-1}(1,2)(2,3) = (1,3) \notin \langle(1,2)\rangle = \operatorname{Ker}\varphi$ なので，$\operatorname{Ker}\varphi$ は正規部分群とならず矛盾.

(解答例 2)　$\varphi : S_3 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を準同型写像とする．互換 $(i,j) \in S_3$ の位数は 2 だから，互換の φ による像の位数は 1 または 2 である．ところが $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の元の位数は 1 または 3 だから，互換の φ による像は単位元である．$(123) = (12)(23)$，$(132) = (13)(23)$ だから S_3 の元はすべて，互換の積で表せ，その φ による像は単位元である．すなわち φ は全射ではない.

$\boxed{4}$　$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$X = \{(v, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid v \cdot w = 1\}$$

が C^∞ 級多様体となることを示せ．ただし $v \cdot w$ は v と w の内積を表わす.

(解答例)　X は C^∞ 級多様体 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad ((a,b),(c,d)) \mapsto ac + bd$$

に関して $X = f^{-1}(1)$ となる．いま

$$df_{((a,b),(c,d))} = (c, d, a, b)$$

となるので，$1 \in \mathbb{R}$ は f の正則値となり，　X は C^∞ 級多様体となる.

$\boxed{5}$　留数計算を用いて次の広義積分の値を求めよ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

(解答例)　この広義積分は収束するから，その値は $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$ で与えられることに注意する.

有理関数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}=\dfrac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$ は $z=\pm 2i$ に (2 位の) 極をもっている．$z=2i$ を中心とする $1/(z+2i)^2$ の巾級数展開は

$$\frac{1}{(z+2i)^2}=-\frac{1}{16}-\frac{i}{32}(z-2i)+\cdots$$

となる．(ここで $(z-2i)$ の係数は $\left.\dfrac{d}{dz}\dfrac{1}{(z+2i)^2}\right|_{z=2i}=-\dfrac{i}{32}$ である．) したがって $f(z)$ の $2i$ を中心とする Laurent 展開は

$$\frac{1}{(z^2+4)^2}=\frac{-1/16}{(z-2i)^2}+\frac{-i/32}{z-2i}+\cdots$$

となり，f の $2i$ における留数は $\mathrm{Res}(f,2i)=-\dfrac{i}{32}$ である．$R>2$ として，実軸上の区間 $[-R,R]$ と半円周 C_R： $z=Re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ からなる閉曲線に留数定理を適用すると

$$\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,2i)=\frac{\pi}{16}.$$

半円周 C_R 上では，$|f(z)|\le\dfrac{1}{(R^2-4)^2}$ だから

$$\left|\int_{C_R}f(z)dz\right|\le\frac{2\pi R}{(R^2-4)^2}$$

これは $R\to\infty$ のとき 0 に収束する．従って $R\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_{-R}^{R}f(x)dx\to\frac{\pi}{16}$.
これが求める値である.

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^2$ における集合 $X=\left\{\left(x,\ \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)\,\middle|\, x\in\mathbb{R}-\{0\}\right\}$ の閉包は連結であることを示せ.

(解答例)

$$X_-=\left\{\left(x,\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)\middle| x<0\right\},\quad X_+=\left\{\left(x,\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)\middle| x>0\right\},$$

$L=\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$ とすると $X=X_-\cup X_+$ である.
$\overline{X_+}\supset L$ であることを示す. ($\overline{}$ は閉包を表わす)．$f(x)=1/x\sin(1/x)$ とおく．$a\in\mathbb{R}$ とし，$\varepsilon>0$ を $1/\varepsilon>|a|$ となるようにとる．$0<x<\varepsilon$ なら，

$1/x > |a|$ である．整数 k を十分を大きく，$(2k+1/2)\pi > 1/\varepsilon$ となるようにとり，$x_1 = 1/(2k+1/2)\pi$，$x_2 = 1/(2k+3/2)\pi$ とおく．すると $f(x_1) = 1/x_1 > |a|$, $f(x_2) = -1/x_2 < -|a|$ なので, 中間値の定理より $f(x_3) = a$ となる $x_2 < x_3 < x_1$ がある．すると，$(x_3, f(x_3))$ と $(0, a)$ の距離は ε より小さい. $\varepsilon > 0$ は任意だったので，$(0, a)$ は X_2 の閉包の元である．（ただし以下の証明では，このような a として $a = 0$ だけでも十分である.）同様に $\overline{X_-} \supset L$ である．

$\overline{X}$ が連結であることを示すには，U, V が $\mathbb{R}^2$ の開集合で $U \cup V \supset \overline{X}$ かつ $U \cap V \cap \overline{X} = \emptyset$ であるとき，$\overline{X}$ が U, V の一方に含まれることを示せばよい．写像

$$\varphi : \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \ni x \quad \mapsto \quad (x, f(x)) \in X_+$$

は連続，またその逆写像

$$\psi : X_+ \ni (x, f(x)) \quad \mapsto \quad x \in \mathbb{R}_{>0}$$

も連続である．よって X_+ は $\mathbb{R}_{>0}$ と同相なので連結である． X_- も同様に連結である．

X_+ は連結だから，X_+ は U, V の一方に含まれる．たとえば $X_+ \subset U$ とする．このとき X_+ と V は共通点をもたないから，$\overline{X_+}$ と V も共通点をもたない．すなわち $\overline{X_+} \subset U$．同様に $\overline{X_-}$ も U, V のどちらか一方に含まれるが，$\overline{X_-} \cap U \supset L \neq \emptyset$ だから $\overline{X_-} \subset U$．したがって $X \subset U$． $X \cap V = \emptyset$ なので $\overline{X} \subset U$ となる．したがって $\overline{X}$ は連結である．

$\boxed{7}$ 関数 f, g は $\mathbb{R}$ 上連続で

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty, \ \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty$$

を満たすものとする．このとき、任意の実数 a に対して微分方程式

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

の解 $y(x)$ のうち $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = a$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ.

(解答例) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ とおけば,

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{F(x)}y(x)\right\} = e^{F(x)}g(x).$$

これより，一般解は

$$y(x) = e^{-F(x)} \left\{ \int_0^x e^{F(s)} g(s) ds + y(0) \right\}$$

となる．仮定より $\lim_{x\to\infty} F(x) = F(\infty) = \int_0^\infty f(x)\, dx$ が存在する．よって $F(x)$ は有界である．$|F(x)| \le M$ とすると

$$\int_0^\infty |e^{F(s)} g(z)|\, ds \le e^M \int_0^\infty |g(s)|\, ds < \infty$$

となる．したがって

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{F(s)} g(s) ds = \int_0^\infty e^{F(s)} g(s) ds$$

が存在するので,

$$y(0) = a e^{F(\infty)} - \int_0^\infty e^{F(s)} g(s) ds$$

ととれば,

$$y(x) = a e^{\int_x^\infty f(s) ds} - \int_x^\infty e^{\int_x^s f(s)} g(s) ds$$

は題意を満たす.
一般解の形より

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = e^{-F(\infty)} \left\{ \int_0^\infty e^{F(s)} g(s) ds + y(0) \right\}$$

である．よって,

$$y(0) = e^{F(\infty)} \lim_{x\to\infty} y(x) - \int_0^\infty e^{F(s)} g(s) ds.$$

したがって，$y(0)$ は $\lim_{x\to\infty} y(x)$ より定まる．1 階微分方程式の解は $y(0)$ より定まるので，$\lim_{x\to\infty} y(x)$ に対し，解は一意的に定まる．