

数学基礎試験 問題 (2013 年度 第 2 回)

- 1 V, W を 1 変数 x のそれぞれ次数 3, 2 以下の実数係数多項式全体からなるベクトル空間とする. 写像 $T: V \rightarrow W$ を

$$T(f)(x) = f''(x) - f'(2x - 1)$$

と定めるとき, 次の問に答えよ.

- (1) T が線形写像であることを証明せよ.
- (2) V, W の基底を選び, それらの基底に関する T の表現行列を求めよ.
- (3) T の核と像の次元を求めよ.

- 2 $a > 0$ とする. 次の曲面 Σ の面積を求めよ.

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

ただし, 閉領域 D 上の C^1 級関数 $z = f(x, y)$ のグラフとして定まる曲面の面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy$$

で与えられる.

- 3 3 次対称群 S_3 から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ への全射群準同型は存在しないことを示せ.

- 4 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$X = \{(v, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid v \cdot w = 1\}$$

が C^∞ 級多様体となることを示せ. ただし $v \cdot w$ は v と w の内積を表わす.

- 5 留数計算を用いて次の広義積分の値を求めよ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

- 6 \mathbb{R}^2 における集合 $X = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$ の閉包は連結であることを示せ.

7 関数 f, g は \mathbb{R} 上連続で

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty$$

を満たすものとする。このとき、任意の実数 a に対して微分方程式

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

の解 $y(x)$ のうち $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = a$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ。