数学基礎試験 問題と解答 （**2013** 年度 第 **1** 回）

$\boxed{1}$ a, b, c, d を複素数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が対角化可能でないための a, b, c, d の条件を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とすると，} \quad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{となる．}$$

したがって，A が対角化可能でないことと，$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化可能でないことは同値である．

行列 B の固有多項式は $t^3 - abd$ である．

$abd \neq 0$ の場合，固有方程式は重根をもたないから B は対角化可能である．

$abd = 0$ の場合，固有値は 0 のみであり，B が対角化可能なのは B が零行列のときに限られる．

よって， A が対角化可能でないための条件は

$$abd = 0 \quad \text{かつ} \quad (a, b, d) \neq (0, 0, 0)$$

である．

$\boxed{2}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)+n}{n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ．

解答

$$f_n(x)=\frac{\sin(nx)+n}{n^2},\qquad S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n f_n(x)$$

とおく．すべての $k=1,2,\ldots$，すべての $x\in\mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned}|-f_{2k-1}(x)+f_{2k}(x)| &\le \left|-\frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{\sin(2kx)}{(2k)^2}+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right| \\ &\le \frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{1}{(2k)^2}+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k} \\ &\le \frac{3}{(2k-1)^2}\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって Weierstrass の M 判定法により，関数項級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-f_{2k-1}(x)+f_{2k}(x))$$

は $\mathbb{R}$ 上一様収束する．すなわち $S_{2N}(x)$ は ある関数 $S(x)$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束する．

$$\begin{aligned}|S_{2N+1}(x)-S(x)| &\le |S_{2N+1}(x)-S_{2N}(x)|+|S_{2N}(x)-S(x)| \\ &= |f_{2N+1}(x)|+|S_{2N}(x)-S(x)|\end{aligned}$$

であり，この右辺は $N\to\infty$ のとき $\mathbb{R}$ 上一様に 0 に収束する．したがって $S_N(x)$ は $N\to\infty$ のとき $\mathbb{R}$ で一様収束する．

（別解） $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ であり $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから，Weierstrass の M 判定法により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束する．

また，交代級数に関する Leibniz の定理より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ は収束する（その和は $-\log 2$）．これは,（定数関数を項とする）関数項級数として，$\mathbb{R}$ 上一様収束している．

2 つの一様収束する関数項級数の，項ごとの和からなる関数項級数は一様収束するから，題意は成り立つ．

注：定理（Weierstrass の M 判定法）I 上の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ について，条件

(i) $\displaystyle\sup_{x\in I}|f_n(x)|\le M_n\ (n=1,2,\ldots)$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ は収束する．

を満たす正数列 $M_n\ (n=1,2,\ldots)$ がとれるならば，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ は I 上一様収束する．

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^2$ の部分空間 X を

$$X = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq \pi\}$$

で定める．このとき, X はコンパクトかつ連結であることを示せ.

$\boxed{\text{解答}}$

コンパクト性：X のコンパクト性を示すには，点列コンパクト性を示せばよい．点列 $(x_n, y_n) \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を考える．$0 \leq x_n \leq \pi$, $-1 \leq y_n \leq 1$ なので, $\mathbb{R}^2$ で収束する部分列 $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ が選べる．その収束先を $(x_\infty, y_\infty) \in \mathbb{R}^2$ とすると $x_\infty \in [0, \pi]$ である．

$x_\infty = 0$ のときは, $-1 \leq y_\infty \leq 1$ なので, (x_∞, y_∞) は X に属する．

$x_\infty \in (0, \pi]$ のときは，十分大きい k に対して $x_{n_k} \in (0, \pi]$ となり，従って $y_{n_k} = \sin(1/x_{n_k})$ が成り立つ．この極限をとって $y_\infty = \sin(1/x_\infty)$ となるので，(x_∞, y_∞) は X に属する．

以上より X が点列コンパクトであることが示された.

（別解） X がコンパクトであるためには，有界閉集合であることが必要十分である．有界であることは明らか．X が閉集合であることを示すには，X の補集合が開集合であることを示せばよい．そのためには X に属さない任意の点 (x_0, y_0) が X と共通点をもたない近傍をもつことを示せばよい．

$x_0 < 0$ または $x_0 > 1$ のときは明らか．

$x_0 = 0$ のときは $|y_0| > 1$ だからこの場合も明らか．

$0 < x_0 \leq 1$ のとき $y_0 \neq \sin(1/x_0)$ である．$\epsilon = |y_0 - \sin(1/x_0)|$ とおく．函数 $\sin(1/x)$ の連続性より十分小さな $\delta > 0$ をとると $|x - x_0| < \delta$ のとき $|\sin(1/x) - \sin(1/x_0)| < \epsilon/2$ したがって $\{(x,y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \epsilon/2\}$ は X と共通点をもたない．

連結性：A, B が X の開集合で, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ をみたすとする.

$$L = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}, \quad C = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq \pi\}$$

は明らかに 弧状連結, したがって連結なので, L, C はそれぞれ A, B のどちらか一方に含まれる．もし, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ とすると, A, B の一方が L で他方が C となり，したがって L, C は X の開集合でなくてはならない．

ところが，L の点のどのように小さな近傍も C の点を含むので, L は X の開集合ではない．これは矛盾である．

したがって $A = \emptyset$ または $B = \emptyset$ となり, X の連結性が示された.

$\boxed{4}$ G_1, G_2 を有限群とし，その位数 $n = |G_1|$, $m = |G_2|$ は互いに素とする．また $\phi : G_1 \times G_2 \to G_1 \times G_2$ を準同型とする．このとき，

$$\phi(g_1, g_2) = (\psi_1(g_1), \psi_2(g_2)), \quad \forall g_1 \in G_1,\ \forall g_2 \in G_2$$

を満たす準同型 $\psi_1 : G_1 \to G_1$, $\psi_2 : G_2 \to G_2$ が存在することを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

$g_1 \in G_1$ に対して, $\phi(g_1, 1) = (\psi_1(g_1), \phi_1(g_1))$ とすると, 写像

$$\psi_1 : G_1 \to G_1, \quad \phi_1 : G_1 \to G_2$$

が定まる．$g_1 \in G_1$ なら $g_1^n = 1$ となるので,

$$(1,1) = \phi(1,1) = \phi(g_1^n, 1) = \phi(g_1, 1)^n = (\psi_1(g_1)^n, \phi_1(g_1)^n)$$

となる．今, n と m は互いに素なので $\phi_1(g_1)^n = 1$ なら $\phi_1(g_1) = 1$ となる．したがって, $\phi(g_1, 1) = (\psi_1(g_1), 1)$ となる．また, ϕ が準同型であることから, ψ_1 が準同型であることがしたがう．

同様に, $g_2 \in G_2$ に対して $\phi(1, g_2) = (1, \psi_2(g_2))$ となり, $\psi_2 : G_2 \to G_2$ が準同型であることがわかる．

よって, $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ に対して

$$\begin{aligned}\phi(g_1, g_2) = \phi((g_1, 1)(1, g_2)) &= \phi(g_1, 1)\phi(1, g_2) \\ &= (\psi_1(g_1), 1)(1, \psi_2(g_2)) = (\psi_1(g_1), \psi_2(g_2))\end{aligned}$$

となる．

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^3$ 内の曲面

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2\}$$

上の函数 $f_a : H \to \mathbb{R}$ を

$$f_a(x) = \|x - (a, 0, 0)\|^2$$

で定める．f_a の臨界点 (x_1, x_2, x_3) がすべて平面 $x_3 = 0$ に含まれるための実数 a の条件を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

$D = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ とする．曲面 H の $x_3 > 0$ の部分 H_+ および $x_3 < 0$ の部分 H_- はそれぞれ

$$x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1},\ (x_1, x_2) \in D; \quad x_3 = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1},\ (x_1, x_2) \in D$$

のグラフとして表せる．したがって $H_\pm$ のそれぞれの上で (x_1, x_2) を座標とみなすことができる．$f_a = (x_1 - a)^2 + x_2^2 + x_3^2$ は，各 $H_\pm$ において (x_1, x_2) の関数として

$$f_a(x_1, x_2) = (x_1 - a)^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$$

と表わされ，偏導関数は

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_1} = 4x_1 - 2a, \quad \frac{\partial f_a}{\partial x_2} = 4x_2.$$

$H_\pm$ 上に f_a の臨界点がないためには，D 上に $\frac{\partial f_a}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_a}{\partial x_2} = 0$ を満たす点がないことが必要十分である．その条件は $(a/2, 0) \notin D$． すなわち $|a| \le 2$ である．

（別解） Lagrange の未定乗数法による．

$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$ とおくと曲面 H は $F = 0$ で与えられる．F の勾配ベクトルは $\nabla F = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$ であり H 上では $\nabla F \neq 0$.

$g_a(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - a)^2 + x_2^2 + x_3^2$ とおくと g_a の H への制限は f_a である．また $\nabla g_a = (2(x_1 - a), 2x_2, 2x_3)$.

H 上の点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ が f_a の臨界点であるためには，実数 λ が存在して $\nabla g_a(x) = \lambda \nabla F(x)$，すなわち

$$x_1 - a = \lambda x_1,\ x_2 = \lambda x_2,\ x_3 = -\lambda x_3$$

が成り立つことが必要かつ十分である．

ここで $x_3 \neq 0$ とすると $\lambda = -1$， これより $x_1 = a/2,\ x_2 = 0$.

$|a| > 2$ ならば $(a/2, 0, \pm\sqrt{(a/2)^2 - 1})$ は平面 $x_3 = 0$ 上にはない f_a の 臨界点である．$|a| \le 2$ ならば $(a/2, 0, x_3)$ となる H 上の点は存在しない．よって求める条件は $|a| \le 2$ である．

（注） f_a の臨界点全体からなる集合を Ca とすると，

$a = 0$ のとき $C_0 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$；

$0 < |a| \le 2$ のとき $C_a = \{(\pm 1, 0, 0)\}$ （２点）；

$|a| > 2$ のとき $C_a = \{(\pm 1, 0, 0), (a/2, 0, \pm\sqrt{(a/2)^2 - 1})\}$ （４点）．

$\boxed{6}$ C を複素平面内の原点を中心とする正の向きの半径 1 の円とする．$|\zeta| \neq 1$ をみたす ζ に対して,

$$f(\zeta) = \int_C \frac{dz}{z(z-\zeta)(z-1/\zeta)}$$

とおくとき,

$$\lim_{\epsilon \to +0} (f(1+\epsilon) - f(1-\epsilon))$$

を求めよ.

解答

$\zeta \neq 0$ のとき，z に関する有理函数 $\dfrac{1}{z(z-\zeta)(z-1/\zeta)}$ の特異点は $z = 0,\ \zeta,\ 1/\zeta$（1 位の極）であり, これらの特異点における留数はそれぞれ

$$1, \quad \frac{1}{\zeta^2 - 1}, \quad \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

である.

ϵ は正の実数で十分小さいとする.

$\zeta = 1+\epsilon$ のとき, C の内部にある特異点は $z = 0,\ 1/\zeta$ なので,

$$f(1+\epsilon) = 2\pi i \left\{ 1 - \frac{(1+\epsilon)^2}{\epsilon(2+\epsilon)} \right\}$$

となる.

一方, $\zeta = 1 - \epsilon$ のとき, C の内部にある特異点は $z = 0,\ \zeta$ なので,

$$f(1-\epsilon) = 2\pi i \left\{ 1 - \frac{1}{\epsilon(2-\epsilon)} \right\}$$

となる．よって

$$f(1+\epsilon) - f(1-\epsilon) = 2\pi i \left\{ -\frac{(1+\epsilon)^2}{\epsilon(2+\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon(2-\epsilon)} \right\} \longrightarrow -\pi i \quad (\epsilon \to +0).$$

$\boxed{7}$ 連立線型常微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のすべての解が $\mathbb{R}$ 上有界となる実数 a の範囲を求めよ.

$\boxed{\text{解答}}$

$\lambda \in \mathbb{C}$ が行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値で $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ が λ に属する固有ベクトル（すなわち $A\boldsymbol{x}_0 = \lambda\boldsymbol{x}_0,\ x_0 \neq 0$）とすると，$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ は微分方程式 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の解である．実際，

$$\boldsymbol{x}'(t) = \lambda \boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t} = A\boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t} = A\boldsymbol{x}(t).$$

この形の解 $\boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t}$ が $\mathbb{R}$ 上有界であるためには λ の実部が 0 であることが必要十分である.（実部が正のときは $t \to \infty$ のとき，実部が負のときは $t \to -\infty$ のとき発散する.）

行列 A の固有値を λ, μ とすると $\lambda + \mu = \mathrm{tr}(A) = a$ が成り立つ．λ, μ の実部が共に 0 とすると，a の実部も 0 である．a は実数だから $a = 0$ でなくてはならない.

逆に， $a = 0$ のとき，一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{it}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

で，すべて $\mathbb{R}$ 上有界である.

したがって求める範囲は $a = 0$ である.

（注１） 上の解答例では与えられた条件を「すべての 複素数値 解が $\mathbb{R}$ 上有界」と解釈して答えたが,「すべての 実数値 解が $\mathbb{R}$ 上有界」と解釈して答えてもよい.

この場合も求める範囲は $a = 0$ である．このことを示すには，$\boldsymbol{x}(t)$ が非有界な複素数値解ならば，$\mathrm{Re}\,\boldsymbol{x}(t),\ \mathrm{Im}\,\boldsymbol{x}(t)$ は実数値解で，少なくとも一方が非有界（実際は恒等的に 0 でなければ非有界）であることに注意すればよい.

（注２） この方程式の一般解を求めても良いことは言うまでもない：

$a \neq \pm 2$ のとき A は相異なる固有値 $\lambda, \mu = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4})$ をもち，一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix} e^{\lambda t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix} e^{\mu t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

$a = 2$ のとき A は重複固有値 1 をもち，一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix} e^{t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

$a = -2$ のとき A は重複固有値 -1 をもち，一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 + t \end{pmatrix} e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$