数学基礎試験 問題 （2013 年度 第 1 回）

$\boxed{1}$ a, b, c, d を複素数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が対角化可能でないための a, b, c, d の条件を求めよ.

$\boxed{2}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx) + n}{n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ.

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^2$ の部分空間 X を

$$X = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq \pi\}$$

で定める．このとき, X はコンパクトかつ連結であることを示せ.

$\boxed{4}$ G_1, G_2 を有限群とし, その位数 $n = |G_1|$, $m = |G_2|$ は互いに素とする．また $\phi : G_1 \times G_2 \to G_1 \times G_2$ を準同型とする．このとき,

$$\phi(g_1, g_2) = (\psi_1(g_1), \psi_2(g_2)), \quad \forall g_1 \in G_1, \forall g_2 \in G_2$$

を満たす準同型 $\psi_1 : G_1 \to G_1$, $\psi_2 : G_2 \to G_2$ が存在することを示せ.

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^3$ 内の曲面

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2\}$$

上の函数 $f_a : H \to \mathbb{R}$ を

$$f_a(x) = \|x - (a, 0, 0)\|^2$$

で定める．f_a の臨界点 (x_1, x_2, x_3) がすべて平面 $x_3 = 0$ に含まれるための実数 a の条件を求めよ.

$\boxed{6}$ C を複素平面内の原点を中心とする正の向きの半径 1 の円とする．$|\zeta| \neq 1$ をみたす ζ に対して,

$$f(\zeta) = \int_C \frac{dz}{z(z - \zeta)(z - 1/\zeta)}$$

とおくとき,

$$\lim_{\epsilon \to +0} (f(1 + \epsilon) - f(1 - \epsilon))$$

を求めよ.

$\boxed{7}$ 連立線型常微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のすべての解が $\mathbb{R}$ 上有界となる実数 a の範囲を求めよ.