数学基礎試験 問題と解答 （2012 年度 第 2 回）

$\boxed{1}$ 4 行 4 列の複素行列 A, B で次の 3 つの性質をすべて満たすものを一組求めよ．

(i) A の固有多項式と B の固有多項式は一致する．

(ii) A の最小多項式と B の最小多項式は一致する．

(iii) A と B は相似でない，すなわち，4 行 4 列の正則な複素行列 P で $B = P^{-1}AP$ となるものは存在しない．

$\boxed{解答}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ がそのような例である．実際，A, B の固有多項式はいずれも x^4 である．また，A, B の最小多項式はいずれも x^2 である．しかし，A, B は異なるジョルダン標準形なので，相似ではない．

$\boxed{2}$ $1 < a < 3$ に対し次を示せ：

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^a}dx < \infty.$$

$\boxed{解答}$

任意の実数 x に対し

$$0 \le 1 - \cos x \le \frac{x^2}{2}.$$

これと $a < 3$, すなわち $-1 < 2 - a$ より

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^a}dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2-a}dx < \infty.$$

一方，

$$0 \le 1 - \cos x \le 1.$$

これと $1 < a$ より

$$\int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^a}dx \le \int_1^\infty x^{-a}dx < \infty.$$

$\boxed{3}$ p を素数，n を正の整数，G を位数 p^n のアーベル群とする．G に位数 p の元がちょうど $(p-1)$ 個存在するとき，G を同型を除いて求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

有限アーベル群の基本定理より，G は

$$(\mathbb{Z}/p^{e_1}\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p^{e_2}\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p^{e_r}\mathbb{Z})$$

（$r \geq 1,\ e_1 \geq 1, e_2 \geq 1, \ldots, e_r \geq 1,\ e_1 + e_2 + \cdots + e_r = n$）と同型である．もし $r \geq 2$ とすると，$(ip^{e_1-1}, 0, \ldots, 0)$（$i = 1, 2, \ldots, p-1$）と $(0, jp^{e_2-1}, \ldots, 0)$（$j = 1, 2, \ldots, p-1$）に対応する G の元は位数が p なので，G には位数 p の元が $2(p-1)$ 個以上存在することになり矛盾する．よって，$r = 1$ である．逆に $r = 1$ のとき，$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の位数 p の元は，ip^{n-1}（$i = 1, 2, \ldots, p-1$）とちょうど $(p-1)$ 個存在する．以上より，位数 p^n のアーベル群 G に位数 p の元がちょうど $(p-1)$ 個存在するならば，G は巡回群 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ と同型である．

$\boxed{4}$ 2 行 2 列の実行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ と表し，

$$O(2) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ は直行行列 }\}$$

とする．このとき，$O(2)$ が $M_2(\mathbb{R})$ $(\cong \mathbb{R}^4)$ の C^∞-級部分多様体であることを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．このとき，

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1, \\ c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0, \end{cases} \tag{1}$$

である．そこで，

$$F : \mathbb{R}^4 \ni (a, b, c, d) \to (a^2 + b^2 - 1, c^2 + d^2 - 1, ac + bd) \in \mathbb{R}^3$$

を考える．関数 F の微分 dF は，

$$dF = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c & 2d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

である．

[$a=0$ **の場合**] このとき，(1) より，$b=\pm 1$，$d=0$，$c\pm 1$ である．よって，dF を基本変形して，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，$\mathrm{rank}(dF)=3$ である．

[$a\neq 0$ **の場合**] このとき，$ad-bc=\pm 1$ より，dF を基本変形して，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 & ab \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

となることが分かる．また，$c=0$ かつ $d=0$ 　とはならないので，$\mathrm{rank}(dF)=3$ となる．

よって，陰関数定理より，$O(2)$ は，$M_2(\mathbb{R})$ $(\cong \mathbb{R}^4)$ の C^∞-級部分多様体である．

$\boxed{5}$ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を定数関数でない正則関数とする．複素数 $m\in\mathbb{C}$ に対して，$f(x)=w$ となる $z\in D$ すなわち $f-w$ の零点を f の w 点と呼び，その零点の位数を w 点 z の位数と呼ぶ．いま，$w\in\mathbb{C}$ に対して，$\mathbb{C}$ の部分集合 $S_w\subset\mathbb{C}$ を次で与える．

$$S_w=\{z\in D\mid f \text{ の位数 } 2 \text{ 以上の } w \text{ 点}\}.$$

さらに $S=\displaystyle\bigcup_{w\in\mathbb{C}} S_w\in\mathbb{C}$ とする．S は $\mathbb{C}$ 内に集積点を持たないことを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

S が $\mathbb{C}$ 内に集積点 $z_0\in\mathbb{C}$ を持つとする．すると $\mathbb{C}$ 内の相異なる点たちからなる点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，$z_n\in S$ $(n=1,2,\dots)$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n=z_0$ なるものが存在する．いま，$z_n\in S_{w_n}$ $(n=1,2,\dots)$ とする．すると，$z_n\in\mathbb{C}$ は正則関数 $f-w_n$ の位数 2 以上の零点であるから，$f'(z_n)=(f-w_n)'(z_n)=0$ $(n=1,2,\dots)$ が成り立つ．f は正則であるから f' も正則である．そして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n=z_0$ であるから一致の定理より関数として $f'=0$ である．よって f は定数関数となり，仮定に反する．したがって S は $\mathbb{C}$ 内に集積点を持たない．

$\boxed{6}$ 位相空間 E の連結な部分集合 A, B について，$A \cap B \neq \emptyset$ とする．このとき，$A \cup B$ は連結であることを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

まず，復習として，位相空間 E の部分集合 C が連結であるとは，E の開集合 U, V について $U \cap V = \emptyset$ で $C \subset U \cup V$ なら $C \subset U$ または $C \subset V$ が成り立つことである．

さて，E の開集合 U, V について $U \cap V = \emptyset$ で $A \cup B \subset U \cup V$ とする．このとき $A \subset A \cup B \subset U \cup V$ であり，A が連結だから，

$$A \subset U \qquad \text{または} \qquad A \subset V$$

が成り立つ．同様に B についても

$$B \subset U \qquad \text{または} \qquad B \subset V$$

が成り立つ．ところで $U \cap V = \emptyset$ なので

$$A \subset U \qquad \text{かつ} \qquad B \subset V$$

と

$$A \subset V \qquad \text{かつ} \qquad B \subset U$$

の場合は，

$$\emptyset \neq A \cap B \subset U \cap V = \emptyset$$

となって矛盾である．従って，

$$A \subset U \qquad \text{かつ} \qquad B \subset U$$

または

$$A \subset V \qquad \text{かつ} \qquad B \subset V$$

のどちらかが成り立つ．前者なら $A \cup B \subset U$ が成り立ち，後者なら $A \cup B \subset V$ が成り立つ．これは $A \cup B$ が連結であることを意味する．