

数学基礎試験問題（2012年度第2回）

1 4行4列の複素行列 A, B で次の3つの性質をすべて満たすものを一組求めよ.

- (i) A の固有多項式と B の固有多項式は一致する.
- (ii) A の最小多項式と B の最小多項式は一致する.
- (iii) A と B は相似でない, すなわち, 4行4列の正則な複素行列 P で $B = P^{-1}AP$ となるものは存在しない.

2 $1 < a < 3$ に対し次を示せ.

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^a} dx < \infty.$$

3 p を素数, n を正の整数, G を位数 p^n のアーベル群とする. G に位数 p の元がちょうど $(p-1)$ 個存在するとき, G を同型を除いて求めよ.

4 2行2列の実行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ と表し,

$$O(2) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ は直行列}\}$$

とする. このとき, $O(2)$ が $M_2(\mathbb{R}) (\cong \mathbb{R}^4)$ の C^∞ -級部分多様体であることを示せ.

5 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を定数関数でない正則関数とする. 複素数 $w \in \mathbb{C}$ に対して, $f(z) = w$ となる $z \in D$ すなわち $f - w$ の零点を f の w 点と呼び, その零点の位数を w 点 z の位数と呼ぶ. 今, $w \in \mathbb{C}$ に対して, \mathbb{C} の部分集合 $S_w \subset \mathbb{C}$ を次で与える.

$$S_w = \{z \in D \mid f \text{ の位数 } 2 \text{ 以上の } w \text{ 点}\}.$$

さらに $S = \bigcup_{w \in \mathbb{C}} S_w \in \mathbb{C}$ とする. S は \mathbb{C} 内に集積点を持たないことを示せ.

6 位相空間 E の連結な部分集合 A, B について, $A \cap B \neq \emptyset$ とする. このとき, $A \cup B$ は連結であることを示せ.