数学基礎試験問題・解答 (2012 年度 第 1 回)

$\boxed{\mathbf{1}}$ x を変数とする実数係数多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ の中で，2 次以下の実数係数多項式全体のなすベクトル空間を V とする．

(1) $f, g \in V$ に対し，

$$f \cdot g = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

とすれば，この演算 $\cdot$ は V の内積になることを証明せよ．

(2) $\{1, x, x^2\}$ に Schmidt の直交化法をほどこすことにより，V の正規直交基底を構成せよ．

解答

(1) $f \cdot f = \sum_{n=-1}^{1} f(n)f(n) = \sum_{n=-1}^{1} \{f(n)\}^2 \geq 0$

$f \cdot f = 0$ のとき，$\sum_{n=-1}^{1} \{f(n)\}^2 = 0$ より，$f(-1) = f(0) = f(1) = 0$ である．0 でない 2 次以下の多項式が異なる 3 個以上の根を持つことはないので，$f = 0$ でなくてはならない．

(2) $\boldsymbol{a}_i = x^i$ $(i = 0, 1, 2)$ とおく．求める正規直交基底を $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ とする．

$||\boldsymbol{a}_0||^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$ より，$\boldsymbol{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\boldsymbol{a}'_1 = \boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_0)\boldsymbol{b}_0$ とおく．$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_0 = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ より $\boldsymbol{a}'_1 = \boldsymbol{a}_1$. $||\boldsymbol{a}'_1||^2 = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$ より，$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_1 = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{a}'_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_0)\boldsymbol{b}_0 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1$ とおく．$\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_0 = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 1 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ より $\boldsymbol{a}'_2 = x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = x^2 - \frac{2}{3}$.
$||\boldsymbol{a}'_2||^2 = \frac{1}{3^2} + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3^2} = \frac{2}{3}$ より，$\boldsymbol{b}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\boldsymbol{a}'_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $I = [0, +\infty)$ とし, 任意の正整数 n に対して I 上の函数 $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f_n(x) = n^2 x e^{-2n^3x^2}$ $(x \in I)$ とする．いま, 函数項級数 $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ を考える．このとき, この函数項級数は I 上各点収束するが, 一様収束しないことを示せ.

解答

$x = 0$ のときは, 任意の正整数 n について, $f_n(0) = 0$ であるから, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$ である．そこで, $x > 0$ とする．いま, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$g(t) = t^3 e^{-2t^2}\,(t \in I)$ とする．すると，g は連続で，$g(0) = 0$，$g(t) > 0\,(t > 0)$，かつ $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$ であるから，ある正実数 $M > 0$ が存在して，$0 < g(t) \le M \ \ (t > 0)$ が成り立つ．よって，$x > 0$ なる任意の実数 x および正整数 n について，次が成り立つ．

$$0 < f_n(x) = \frac{n^{\frac{9}{2}} x^3 e^{-2n^3 x^2}}{n^{\frac{5}{2}} x^2} = \frac{g(n^{\frac{3}{2}} x)}{n^{\frac{5}{2}} x^2} \le \frac{M}{n^{\frac{5}{2}} x^2}.$$

ここで，$\dfrac{5}{2} > 1$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{\frac{5}{2}} x^2} = \frac{M}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} < +\infty$．ゆえに，$x > 0$ なる任意の実数 x について，級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は収束する．

次に，この函数項級数が I 上一様収束しないことを示す．函数項級数 $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I 上一様収束するとは，函数列 $\left\{ h_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n \right\}_{N=1}^{\infty}$ が I 上一様収束することである．このことは，任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して，正整数 N_0 が存在して，$N_0 < L < N$ ならば次が成り立つということと同値である．

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{n=L+1}^{N} f_n(x) \right| = \sup_{x \in I} |h_N(x) - h_L(x)| < \varepsilon.$$

特に，$N = L + 1$ なる場合を考えることにより，函数項級数 f が I 上一様収束すれば，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in I} |f_n(x)| \right) = 0$ が成り立つことが分かる．ところで，任意の正整数 n について，$f_n'(x) = n^2 e^{-2n^3 x^2} - 4n^5 x^2 e^{-2n^3 x^2} = n^2 (1 - 4n^3 x^2) e^{-2n^3 x^2} \ \ (x \in I)$ となる．よって，f_n は I 上 $x = \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ において最大値 $f_n\left(\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \right) = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$ となり，

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in I} |f_n(x)| \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2} e^{-\frac{1}{2}} = +\infty.$$

従って，この函数項級数は I 上一様収束しない．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 位相空間 X の部分集合 Y について，次の (a), (b) は同値であることを示せ：

(a) Y は内点をもたない．

(b)　Y の補集合は X において稠密である．

ここで，$y \in Y$ が Y の内点であるとは，X における y のある開近傍が Y に含まれることを言う．

(2) 位相空間 X の閉部分集合 A, B が内点をもたないとする．このとき A, B の合併 $A \cup B$ も内点をもたないことを示せ．

解答

(1)：Z を Y の補集合とする．X の開集合 O について，

$$(*) \qquad O \cap Z = \emptyset \iff O \subset Y$$

であることは容易である．

まず (a) を仮定すると，同値性 $(*)$ から，Z と交わらない開集合 O は空集合に限る．つまり，空でない開集合は必ず Z と交わる (空でない共通部分をもつ)．つまり Z は稠密であることがわかり，(b) が言える．

逆に，(b) を仮定する．もし，(a) が成り立たないなら，空でない開集合 O で Y に含まれるものがある．このとき，上の $(*)$ から，そのような O は Z との交わりが空となる．つまり，Z は稠密でなく (b) に反する．

(2) A, B の (X における) 補集合をそれぞれ U, V とおく．A, B が閉だから U, V は開．(1) を用いると，U, V は稠密である．また，$A \cup B$ の補集合は $U \cap V$ だから，(1) よりこの $U \cap V$ が稠密であることを言えばよい．空でない (X の) 任意の開集合 O をとり，$(U \cap V) \cap O$ が空でないことを言えばよい．これは

$$(U \cap V) \cap O = U \cap (V \cap O)$$

に注意して，まず V が稠密だから $V \cap O$ は空でなく，また，V も O も開なので，$V \cap O$ は開である．つまり，$V \cap O$ は空でない開集合である．従ってまた，U は稠密だから，$U \cap (V \cap O)$ は空でなく，$(U \cap V) \cap O$ は空でない．よって $U \cap V$ は稠密となって (2) が示された．

4 素イデアルを丁度3個もつような可換環の例を与えよ．

ただし，　可換環は乗法の単位元 1 をもつものとする．

解答

F を体とすると F の素イデアルは $\{0\}$ のみである．よって F_1, F_2, F_3 を体とするとき $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ は 3 個の素イデアルをもつ．また，形式的ベキ級数環 $F_1[[x]]$ の素イデアルは (x) と $\{0\}$ の 2 個だけなので $F_1[[x]] \oplus F_2$ は 3 個の素イデアルをもつ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，

$$M = \{\ A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^t AJA = J\ \}$$

を考える．このとき，M は C^∞-多様体であることを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおく。

$${}^t AJA = J \Leftrightarrow xw - yz - 1 = 0$$

である。そこで、$f(x, y, z, w) = xw - yz - 1$ とおき、f のヤコビ行列 df を求めると

$$df = (w, -z, -y, x)$$

となる。$df = (0, 0, 0, 0)$ となるのは、$x = y = z = w = 0$ のときである。一方、$f(0, 0, 0, 0) = -1 \neq 0$ である。よって、$A \in M$ において、df のランクは 1 である。ゆえに、陰関数定理によって、M は C^∞ -多様体である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ $D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ とおく．函数 f は D 上で正則かつ $\bar{D}$ 上で連続であり，$f(\partial D) \subset \partial D$ とする．さらに，函数 f の D 上の零点は $z = 0$ のみであるとする．このような函数 f をすべて求めよ．ただし，$\bar{D}$ は D の閉包を，∂D は D の境界を表すものとする．

$\boxed{\text{解答}}$

$z = 0$ は m 位の零点とする．$g(z) = f(z)/z^m$ とおくと，函数 g は D 上正則，$\bar{D}$ 上連続かつ D 上で零点を持たない．いま函数 $|g|$ が定数函数でないとすると，最大値原理より D 上で最大値も最小値も持たないので矛盾．よって，$|g|$ は定数函数となる．絶対値が定数である正則函数は定数函数だけなので，$f(\partial D) \subset \partial D$ より $|g(z)| = 1$．結局，$|\alpha| = 1$ を満たすある $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し，

$$f(z) = \alpha z^m.$$

注意．Blaschke 積因数分解の一番簡単なケースである．