# 数学基礎試験 問題 （2012 年度 第 1 回）

$\boxed{1}$ $x$ を変数とする実数係数多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ の中で，2 次以下の実数係数多項式全体のなすベクトル空間を V とする．

(1) $f, g \in V$ に対し，

$$f \cdot g = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

とすれば，この演算 $\cdot$ は $V$ の内積になることを証明せよ．

(2) $\{1, x, x^2\}$ に Schmidt の直交化法をほどこすことにより，$V$ の正規直交基底を構成せよ．

$\boxed{2}$ $I = [0, +\infty)$ とし，任意の正整数 $n$ に対して $I$ 上の函数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) = n^2 x e^{-2n^3x^2}$ $(x \in I)$ とする．いま，函数項級数 $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ を考える．このとき，この函数項級数は $I$ 上各点収束するが，一様収束しないことを示せ．

$\boxed{3}$ (1) 位相空間 $X$ の部分集合 $Y$ について，次の (a), (b) は同値であることを示せ：

(a) $Y$ は内点をもたない．

(b) $Y$ の補集合は $X$ において稠密である．

ここで，$y \in Y$ が $Y$ の内点であるとは，$X$ における $y$ のある開近傍が $Y$ に含まれることを言う．

(2) 位相空間 $X$ の閉部分集合 $A, B$ が内点をもたないとする．このとき $A, B$ の合併 $A \cup B$ も内点をもたないことを示せ．

$\boxed{4}$ 素イデアルを丁度 3 個もつような可換環の例を与えよ．
ただし，可換環は乗法の単位元 1 をもつものとする．

$\boxed{5}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，

$$M = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tAJA = J\}$$

を考える．このとき，$M$ は $C^\infty$-多様体であることを示せ．

$\boxed{6}$ $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とおく．函数 $f$ は $D$ 上で正則かつ $\bar{D}$ 上で連続であり，$f(\partial D) \subset \partial D$ とする．さらに，函数 $f$ の $D$ 上の零点は $z = 0$ のみであるとする．このような函数 $f$ をすべて求めよ．ただし，$\bar{D}$ は $D$ の閉包を，$\partial D$ は $D$ の境界を表すものとする．