数学基礎試験 問題と解答 （2010 年度 第 2 回）

$\boxed{1}$ 5 行 5 列の行列 A の最小多項式が $(x-1)^3$ であるとする．このとき，A の固有多項式とジョルダン標準形を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

A の固有値は 1 のみである．したがって，A の固有多項式は $(x-1)^5$ である．ジョルダン標準形は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

または

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ 上で定義された関数列

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^{2n} e^{4nx}}{1 + n^2 x^{2n} e^{4nx}},\ n \in \mathbb{N}$$

は $n \to \infty$ のとき $\mathbb{R}$ 上各点収束することを示せ．また，この収束は $\mathbb{R}$ 上一様か？

$\boxed{\text{解答}}$

$x > 0$ の時，

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{1 + n^2 x^{2n} e^{4nx}}$$

より, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

$x < 0$ の時,

$$0 \le f_n(x) \le n^2 x^{2n} e^{4nx} = n^2 \left(\frac{|x|}{2|x|} \right)^{2n} = n^2 (1/2)^{2n}$$

であるから, $x \le 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

$f_n(x)$ は連続で, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は原点で不連続なので, 一様収束しない.

$\boxed{3}$ n を正の整数とする. 位数 n のアーベル群が常に巡回群と同型であるための n の条件を求めよ.

$\boxed{\text{解答}}$

n の素因数分解が重複因子をもたないこと.

もし n が重複因子をもてば, $n = m_1 m_2$ (m_1, m_2 は共通因子をもつ) と表せる. 位数 n のアーベル群

$$\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}$$

は位数 n の元をもたないので巡回群ではない.

逆に, n が重複因子をもたなければ, アーベル群の基本定理より, 位数 n のアーベル群は巡回群と同型である.

$\boxed{4}$ 写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y, z, w) = x^2 + y^3 + z^4 + w^5$ で定める. このとき, 任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $f^{-1}(a)$ は多様体であることを示せ.

$\boxed{\text{解答}}$

f のヤコビ行列 $J_f = (2x, 3y^2, 4z^3, 5w^4)$ なので, $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ が臨界点になるのは, $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ のときに限る. よって, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ は正則値. したがって, 正則値定理より任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $f^{-1}(a)$ は多様体である.

$\boxed{5}$ 複素平面内の領域 D において $f(z)$ と $\overline{f(z)}$ が共に正則であるならば, $f(z)$ は定数であることを示せ.

$\boxed{\text{解答}}$

$$g(z) = f(z) + \overline{f(z)}$$

は正則で, 実数値のみをとる. g の実部と虚部を u, v とすればコーシー・リーマンの方程式

$$u_x(x+iy) - v_y(x+iy) = 0,\ u_y(x+iy) + v_x(x+iy) = 0$$

より, $v = 0$ なので, $u_x = u_y = 0$, よって $g(z) = u(z)$ は局所的に（すなわち，各点の近傍で）定数となる. 即ち $f(z)$ の実部が局所的に定数となるので, 再びコーシー・リーマンの方程式を用いれば, 同様に $f(z)$ が局所的に定数であることが従う. 領域 D は連結なので，D 全体でも定数となる.

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^3$ の部分集合 Z を

$$Z = \{(x, y, z) \mid\ z = 0 \text{ または } z = 1\ \}$$

と定め, Z に次の同値関係 $\sim$ を入れる.

$$(x, y, 0) \sim (x', y', 1) \iff (x, y) = (-x', -y') \text{ かつ } (x, y) \neq (0, 0),$$
$$(x, y, 1) \sim (x', y', 0) \iff (x, y) = (-x', -y') \text{ かつ } (x, y) \neq (0, 0).$$

このとき, 商空間 $Z/\sim$ はハウスドルフ空間か？ ただし, Z には $\mathbb{R}^3$ の通常の位相が定める部分位相を入れるものとする.

$\boxed{\text{解答}}$

$[0, 0, 0]$ の近傍 U_0 は, 正数 ϵ_0 を適当にとるとき, $\{[x, y, 0] \mid x^2 + y^2 < \epsilon_0^2\}$ を含む. 同様に, $[0, 0, 1]$ の近傍 U_1 は, 正数 ϵ_1 を適当にとるとき, $\{[x, y, 1] \mid x^2 + y^2 < \epsilon_1^2\}$ を含む. $\epsilon = \min(\epsilon_0, \epsilon_1)/2$ とおくとき,

$$[\epsilon, 0, 0] = [-\epsilon, 0, 1] \in U_0 \cap U_1$$

より, 商空間はハウスドルフ空間ではない.