数学基礎試験 問題 （2011 年度 第 2 回）

$\boxed{1}$ 5 行 5 列の行列 A の最小多項式が $(x-1)^3$ であるとする. このとき, A の固有多項式とジョルダン標準形を求めよ.

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ 上で定義された関数列

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^{2n} e^{4nx}}{1 + n^2 x^{2n} e^{4nx}},\ n \in \mathbb{N}$$

は $n \to \infty$ のとき $\mathbb{R}$ 上各点収束することを示せ. また, この収束は $\mathbb{R}$ 上一様か？

$\boxed{3}$ n を正の整数とする. 位数 n のアーベル群が常に巡回群と同型であるための n の条件を求めよ.

$\boxed{4}$ 写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z,w) = x^2 + y^3 + z^4 + w^5$ で定める．このとき，任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，$f^{-1}(a)$ は多様体であることを示せ．

$\boxed{5}$ 複素平面内の領域 D において $f(z)$ と $\overline{f(z)}$ が共に正則であるならば, $f(z)$ は定数であることを示せ.

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^3$ の部分集合 Z を

$$Z = \{(x,y,z) \mid\ z = 0 \text{ または } z = 1\ \}$$

と定め, Z に次の同値関係 $\sim$ を入れる.

$$(x,y,0) \sim (x',y',1) \iff (x,y) = (-x',-y') \text{ かつ } (x,y) \neq (0,0),$$
$$(x,y,1) \sim (x',y',0) \iff (x,y) = (-x',-y') \text{ かつ } (x,y) \neq (0,0).$$

このとき, 商空間 $Z/\sim$ はハウスドルフ空間か？ ただし, Z には $\mathbb{R}^3$ の通常の位相が定める部分位相を入れるものとする.