数学基礎試験問題・解答 (2011 年度 第 1 回)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 t に対して,

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2t+2 & -2t+1 & -2t-1 \\ t & t+1 & t+1 \\ t & t & t+2 \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, $A(t)$ のジョルダン標準形が $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる t を求めよ.

解答

$A(t)$ が $(A(t)-2)(A(t)-1)=0$ をみたすのは $t=0$ のときのみ. このとき $\det A(0) = 4$ なので $A(0)$ のジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 a に対し, 無限級数で定義される $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(a^n x)}{n!}$$

は $\mathbb{R}$ 上無限回微分可能かつ各導関数 $f^{(k)}(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ.

解答

各非負整数 k に対し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{\cos(a^n x)}{n!} \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a|^{nk}}{n!} = M_k$$

が成り立つので, 項別微分可能定理を適用すれば, f は無限回微分可能であることがわかる. さらに, 平均値の定理より

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \le M_{k+1}|x-y|$$

となるので, $f^{(k)}$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続である. 即ち,
任意の正数 ε に対して, $\delta = \varepsilon/M_{k+1}$ とすれば, $|x-y| < \delta$ のとき,

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ X, Y をコンパクト距離空間, $a \in X$, $b \in Y$ とし, f を $X \setminus \{a\}$ から $Y \setminus \{b\}$ への上への同相写像とする. このとき, f は X から Y への同相写像に拡張されることを示せ.

$\boxed{\text{解答}}$

X から Y への写像 g を

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ b, & x = a, \end{cases}$$

と定めると, g は X から Y への全単射. g と g^{-1} が連続であることを示せばよい.

$U \subset Y$ を開集合とする. $b \notin U$ のとき, $g^{-1}(U) = f^{-1}(U)$. f は連続なので $f^{-1}(U)$ は $X \setminus \{a\}$ の開集合であり, X の開集合. $b \in U$ のとき, $F = Y \setminus U$ は $Y \setminus \{b\}$ のコンパクト部分集合. f^{-1} は連続なので $f^{-1}(F)$ はコンパクトとなり, 特に X の閉集合. よって $g^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(F)$ は X の開集合. 以上から g は連続.

全く同様に g^{-1} が連続であることを示すことができる.

$\boxed{\mathbf{4}}$ G を n 次複素正則行列全体のなす群, H をその有限部分群とする. もし H の各元がエルミート行列であるならば, H の位数は 2 のべきになることを示せ.

$\boxed{\text{解答}}$

H の元はエルミート行列ゆえ対角化可能, つまり $A \in H$ について $P \in G$ で $PAP^{-1} = D$ が対角行列となるようなものが存在する. ここで A がエルミートなので D は実対角行列であることに注意すると, A の位数$=$ D の位数, は有限であることより D の対角成分は ± 1 に限る. つまり $D^2 = E \iff A^2 = E$ となることより, H の各元の位数は 2 または 1. 一般に 素数 p が有限群 H の位数の約数ならば H は位数 p の元をもつことより, H の位数の素因数は 2 に限る. つまり H の位数は 2 のべきになる.

(注) H の元の位数がたかだか 2 であることより, H はアーベル群になるので同時対角化可能. これから

$$H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ (} r \text{ 個の直積, } 0 \leq r \leq n\text{)}$$

が分かる.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $0 \leq t \leq 1$ とし, 各 t に対して関数 $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を,

$$F_t(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + t$$

で定める. このとき, $F_t^{-1}(0)$ が $\mathbb{R}^3$ の滑らかな部分多様体となるのは, t がどのような値を取るときか.

解答

$t \neq 0$ のとき, $F_t(x, y, z) = 0$ を満たせば $z \neq 0$ となる. よって特に dF_t は 0 にならず, 陰関数定理より, $F_t^{-1}(0)$ は滑らかな部分多様体となる.

一方で, $t = 0$ のとき, $F_0^{-1}(0)$ は (x,y,z)=(0,0,0) で滑らかではない. 実際, $F_0^{-1}(0)$ は連結であるが, $F_0^{-1}(0) \backslash (0, 0, 0)$ は非連結となり, 2 次元多様体とはなり得ない.

$\boxed{\mathbf{6}}$ d 次多項式 $P(z)$ に対し, 次の複素線積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{zP''(z)}{P(z)}\, dz$$

ただし, C は $P(z)$ のすべての零点を囲む正の向きの円周とする.

解答

$d \geq 2$ とし, $P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_0$, $a_d \neq 0$ とおく. 問の積分値を I として, 変換 $w = 1/z$ によって

$$I = \int_{-C'} \frac{P''(1/w)}{w^3 P(1/w)}\, dw$$

となる. ただし, C' はこの変換による C の像である. この被積分函数の $-C'$ 内の極の可能性は $w = 0$ のみであるが, 実際 $w = 0$ のまわりの Laurent 展開は

$$\frac{P''(1/w)}{w^3 P(1/w)} = \frac{\dfrac{d(d-1)a_d}{w^{d-2}} + \cdots + 2a_2}{w^3 \left(\dfrac{a_d}{w^d} + \cdots + a_0 \right)}$$

$$= \frac{d(d-1)a_d + O(w)}{a_d w + O(w^2)} = \frac{d(d-1)}{w} + (\text{正則部})$$

となり,

$$I = 2d(d-1)\pi i$$

を得る. これは $d = 0, 1$ の場合にも正しい.