数学基礎試験問題 (2011 年度 第 1 回)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 t に対して,

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2t+2 & -2t+1 & -2t-1 \\ t & t+1 & t+1 \\ t & t & t+2 \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, $A(t)$ のジョルダン標準形が $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる t を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 a に対し, 無限級数で定義される $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(a^n x)}{n!}$$

は $\mathbb{R}$ 上無限回微分可能かつ各導関数 $f^{(k)}(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ X, Y をコンパクト距離空間, $a \in X$, $b \in Y$ とし, f を $X \setminus \{a\}$ から $Y \setminus \{b\}$ への上への同相写像とする. このとき, f は X から Y への同相写像に拡張されることを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ G を n 次複素正則行列全体のなす群, H をその有限部分群とする. もし H の各元がエルミート行列であるならば, H の位数は 2 のべきになることを示せ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $0 \le t \le 1$ とし, 各 t に対して関数 $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を,

$$F_t(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + t$$

で定める. このとき, $F_t^{-1}(0)$ が $\mathbb{R}^3$ の滑らかな部分多様体となるのは, t がどのような値を取るときか.

$\boxed{\mathbf{6}}$ d 次多項式 $P(z)$ に対し, 次の複素線積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{zP''(z)}{P(z)}\, dz$$

ただし, C は $P(z)$ のすべての零点を囲む正の向きの円周とする.