数学基礎試験 問題と解答 （2010 年度 第 2 回）

$\boxed{1}$ n を正の整数，$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ とする．正方行列

$$A = \begin{pmatrix} & & & & a_1 \\ & & & a_2 & \\ & & \iddots & & \\ & a_{n-1} & & & \\ a_n & & & & \end{pmatrix}$$

は正則ならば対角化可能であることを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

A が正則 $\Leftrightarrow a_i \neq 0$ である．

n **が偶数のとき：**e_i $(1 \leq i \leq n)$ を $\mathbb{C}^n$ の標準基底とする．

$$Ae_k = a_{n-k}e_{n-k}$$

であるから，e_k, e_{n-k} の張る部分空間 V_k $(1 \leq k \leq \frac{n}{2})$ への A の作用が対角化できることを示せばよい．

この作用の行列表示は

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ a_{n-k} & 0 \end{pmatrix}$$

であるが，$a_k, a_{n-k} \neq 0$ のとき B_k の固有多項式は異なる 2 根 $\pm(a_k a_{n-k})^{1/2}$ をもつので，B_k は対角化可能である．

n **が奇数** $2m+1$ **のとき：** A の作用は V_k $(1 \leq k \leq m)$ と，$\mathbb{C}a_{m+1}$ への作用に分解する．偶数のときと同様に対角化可能である．

注意．正方行列 A が対角化可能であるとは，PAP^{-1} が対角行列になるような正則行列 P が存在することをいう．

$\boxed{2}$ 正数 a, b に対して，函数 f を

$$f(a,b)=\int_0^{\pi/2}\log(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\,d\theta$$

で定める．このとき $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b)=\dfrac{\pi}{a+b}$ を示し，これから $f(a,b)$ を求めよ．

解答

$$\frac{\partial}{\partial a}\log(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)=\frac{2a\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$$

は a, b, θ に関して連続だから，有界閉集合上で有界．従って微分と積分の順序交換が出来て

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) &= \int_0^{\pi/2}\frac{2a\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{a^2+b^2\tan^2\theta}\,d\theta \quad (t=\tan\theta,\ dt=\sec^2\theta\,d\theta) \\
&= 2a\int_0^{\infty}\frac{dt}{(a^2+b^2t^2)(1+t^2)} \\
&= \frac{2a}{a^2-b^2}\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{1+t^2}-\frac{b^2}{a^2+b^2t^2}\right\}dt \\
&= \frac{2a}{a^2-b^2}\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{b}{a}\right\} \\
&= \frac{\pi}{a+b}.
\end{aligned}$$

$a=b$ のときは上の部分分数の展開が出来ないが,

$$\frac{2}{a}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2a}$$

は直接計算して確かめられる．従って原始函数を求めて

$$f(a,b)=\pi\log(a+b)+C(b)$$

となる．$C(b)$ は b にのみ依存する定数である．

また

$$f(b,b) = \int_0^{\pi/2} 2\log b\, d\theta = \pi \log b$$

は容易に分かる．よって

$$f(b,b) = \pi \log(2b) + C(b) = \pi \log b$$

から $C(b) = -\pi \log 2$ が従う．これで最終的に

$$f(a,b) = \pi \log(a+b) - \pi \log 2 = \pi \log \frac{a+b}{2}$$

が示せる．

$\boxed{3}$ 有限な可換環 A （必ずしも乗法の単位元の存在を仮定しない）が

$$a \neq 0,\, b \neq 0 \implies ab \neq 0$$

を満たすとする．A の元の数は 2 以上とする．このとき，A には必ず乗法に関する単位元が存在することを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

$A \ni a \neq 0$ を任意にとる． a のベキの集合 $\{a^n \,|\, n = 1, 2, \cdots\}$ を考えると，A は有限集合だから $n > m \geq 1$ を満たす整数 n, m が存在して

$$a^n = a^m$$

となる．ここで $e = a^{n-m}$ と置き，e が乗法の単位元であることを示そう．任意の $b \in A$ に対して $a^n\, b = a^m\, b$ なので

$$e\, a^m\, b = a^n\, b = a^m\, b$$

であるが，これは $(e\,b - b)a^m = 0$ を導く．仮定より $a^m \neq 0$ であり，従って，$e\,b - b = 0$ となる．b は任意だったから e は単位元である．

$\boxed{4}$ 3次正方実行列全体の集合を $M(3,\mathbf{R})$ で表わす．このとき3次特殊直交群を以下のように定義する:

$$SO(3,\mathbf{R}) := \{A \in M(3,\mathbf{R}) \mid {}^tAA = I,\ \mathrm{det}A = 1\}.$$

$SO(3,\mathbf{R})$ が微分可能多様体であることを示し，その次元を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

$$O(3,\mathbf{R}) := \{A \in M(3,\mathbf{R}) \mid {}^tAA = I\}$$

とおく．完全系列

$$1 \to SO(3,\mathbf{R}) \to O(3,\mathbf{R}) \xrightarrow{\det} \{1,-1\} \to 1.$$

に注意すると $SO(3,\mathbf{R})$ は $O(3,\mathbf{R})$ の閉かつ開集合（実は連結成分）であることがわかる．$A = (x_{i,j})$ と書くと，${}^tAA = I$ より $x_{i,j}$ に関する合計9個の2次式を得る．これらを実際書き下すと，次の6個の式を得る

$$x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 = 1$$
$$x_{12}x_{11} + x_{22}x_{21} + x_{32}x_{31} = 0$$
$$x_{13}x_{11} + x_{21}x_{23} + x_{33}x_{31} = 0$$
$$x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{32}^2 = 1$$
$$x_{12}x_{13} + x_{22}x_{23} + x_{32}x_{33} = 0$$
$$x_{13}^2 + x_{23}^2 + x_{33}^2 = 1$$

これらの微分をとって，$I \in M(3,\mathbf{R})$ に制限すると (すなわち $x_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $x_{ii} = 1$ を代入すると) 次を得る

$$dx_{11} + dx_{21} + dx_{31} = 0$$
$$dx_{12} + dx_{21} = 0$$
$$dx_{13} + dx_{31} = 0$$
$$dx_{12} + dx_{22} + dx_{32} = 0$$
$$dx_{23} + dx_{32} = 0$$
$$dx_{13} + dx_{23} + dx_{33} = 0$$

左辺は互いに 1 次独立な 1 型式なので，陰函数定理より，$I \in SO(3,\mathbf{R})$ の適当な近傍は、$0 \in \mathbf{R}^3$ の近傍と同相である．これによって，$I \in SO(3,\mathbf{R})$ における局所座標系が定まった。一般の点 $A \in SO(3,\mathbf{R})$ に対しても，写像

$$L_A : SO(3,\mathbf{R}) \to SO(3,\mathbf{R}) \quad (X \to A \cdot X)$$

を合成することにより局所座標系が定まる．これらによって，$SO(3,\mathbf{R})$ は 3 次元微分可能多様体になる．

別解 ： $A \in SO(3,\mathbf{R})$ の行ベクトルを $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ と書くと，これらは，$\mathbf{R}^3$ の正規直交基底になる． $\det A = 1$ なので，

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

である．$\mathbf{a}_1$ の決め方はちょうど $\mathbf{R}^3$ の単位球面 S^2 の分だけあるので，写像

$$SO(3,\mathbf{R}) \to S^2$$

が定まる．いったん $\mathbf{a}_1$ が決まれば、$\mathbf{a}_1$ に直交する（原点を通る）平面を考え、その中の正規直交系 $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ を正の向きにとることによって $SO(3,\mathbf{R})$ の元が完全に決まる．すなわち，上で定義した写像は，S^1-束になる．このことからも $SO(3,\mathbf{R})$ が 3 次元の微分可能多様体であることがわかる．

より一般に Lie 環

$$\mathbf{so}(n) := \{A \in M(n,\mathbf{R}); {}^tA + A = 0\}$$

から $SO(n,\mathbf{R})$ に指数写像 (exponential map) が定義され、原点の近傍で局所同型になる．このことと，$SO(n,\mathbf{R})$ の群構造を組み合わせると $SO(n,\mathbf{R})$ が $n(n-1)/2$ 次元の微分可能多様体であることが分かる．

$\boxed{5}$ 負の実数 k に対し，次の積分の値を求めよ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

$\boxed{\text{解答}}$

$m = -k$ とおき，次のような複素積分を考える．

$$
\begin{aligned}
&I := \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{(1+z^2)^2}\ dz, \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2,\\
&\Gamma_1 = \{z = Re^{i\theta} |\ 0 \leq \theta \leq \pi\},\\
&\Gamma_2 = \{z = t |\ -R \leq t \leq R\}.
\end{aligned}
$$

ただし，$R > 0$ とし，積分路 Γ は反時計回りの向きであるとする．曲線 Γ に囲まれる領域において，被積分函数は 2 位の極 i を除いて正則である．留数定理より，

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{e^{imz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)\\
&= 2\pi i \lim_{z\to i}\left(-\frac{2}{(z+i)^3} + \frac{im}{(z+i)^2}\right)e^{imz} = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right)e^k.
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\Gamma_1} \frac{e^{imz}}{(1+z^2)^2}\ dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{imRe^{i\theta}}}{(1+R^2e^{2i\theta})^2} iRe^{i\theta}\ d\theta\right|\\
&\leq \int_0^\pi \frac{Re^{-mR\sin\theta}}{(R^2-1)^2} d\theta \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \ \longrightarrow\ 0 \qquad (R \to \infty)
\end{aligned}
$$

である．ゆえに，余弦函数は偶函数で正弦函数は奇函数であることに注意すれば，

$$
\begin{aligned}
&\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right)e^k = \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{(1+z^2)^2}\ dz\\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{imz}}{(1+z^2)^2}\ dz + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos(mx) + i\sin(mx)}{(1+x^2)^2}\ dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(1+x^2)^2}\ dx.
\end{aligned}
$$

$\boxed{6}$ 位相空間 X の点列 $p_n \in X$ $(n = 0, 1, \cdots)$ が点 $p \in X$ に収束するとき，X の部分集合

$$
Y = \{p_n \mid n = 0, 1, \cdots\} \cup \{p\}
$$

はコンパクトであることを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

X の開集合の族 $\mathfrak{U}$ が Y を被覆するとしよう．このとき $p \in Y$ を含む $U_0 \in \mathfrak{U}$ が存在する．点列 $p_n \in X$ $(n = 0, 1, \cdots)$ は p に収束するので，$N > 0$ が存在して，$n \geq N$ ならば $p_n \in U_0$ である．$n \leq N - 1$ に対しては $p_n \in U_n$ なる $U_n \in \mathfrak{U}$ が存在するから，Y は $\{U_0, U_1, \cdots U_{N-1}\}$ という $\mathfrak{U}$ の有限部分族で被覆されることになる．つまり Y はコンパクトである．

注意．位相空間 Z がコンパクトであるとは，Z の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対して，有限部分被覆 $U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{U}$, $Z = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ が取れることをいう．