数学基礎試験 問題 （2010 年度 第 2 回）

$\boxed{1}$ n を正の整数，$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ とする．正方行列

$$A = \begin{pmatrix} & & & & a_1 \\ & & & a_2 & \\ & & \iddots & & \\ & a_{n-1} & & & \\ a_n & & & & \end{pmatrix}$$

は正則ならば対角化可能であることを示せ．

$\boxed{2}$ 正数 a, b に対して，函数 f を

$$f(a,b) = \int_0^{\pi/2} \log(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\, d\theta$$

で定める．このとき $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \dfrac{\pi}{a+b}$ を示し，これから $f(a,b)$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 有限な可換環 A （必ずしも乗法の単位元の存在を仮定しない）が

$$a \neq 0,\ b \neq 0 \implies ab \neq 0$$

を満たすとする．A の元の数は 2 以上とする．このとき，A には必ず乗法に関する単位元が存在することを示せ．

$\boxed{4}$ 3 次正方実行列全体の集合を $M(3, \mathbf{R})$ で表わす．このとき 3 次特殊直交群を以下のように定義する:

$$SO(3, \mathbf{R}) := \{A \in M(3, \mathbf{R}) \mid {}^tAA = I,\ \mathrm{det}A = 1\}.$$

$SO(3, \mathbf{R})$ が微分可能多様体であることを示し，その次元を求めよ.

$\boxed{5}$ 負の実数 k に対し，次の積分の値を求めよ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

$\boxed{6}$ 位相空間 X の点列 $p_n \in X$ $(n = 0, 1, \cdots)$ が点 $p \in X$ に収束するとき，X の部分集合

$$Y = \{p_n \mid n = 0, 1, \cdots\} \cup \{p\}$$

はコンパクトであることを示せ．