数学基礎試験 問題と解答 （2010 年度 第 1 回）

$\boxed{1}$ n を正の整数，E を複素線型空間

$$E = \{F(x) \mid F(x) \text{ は次数が } n \text{ 次以下の複素係数一変数多項式} \}$$

とし，その上の線型写像 $f : E \to E$,

$$f(F(x)) = (xF(x) + F(1) \text{ を } x^{n+1} \text{ で割った余り})$$

を考える．このとき，

(1)　基底 $1, x, \ldots, x^n$ に関する f の行列表示を求めよ．

(2)　f の特性多項式を求めよ．

注．元の問題にはミスがありましたので，f の定義を修正してあります．

解答

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(第 1 行が全て 1，左下 $n \times n$ が単位行列，他 0 となる $n+1$ 次正方行列．)

(2) 上の行列の特性多項式を $\Phi_n(x)$ と書く．$\Phi_1(x) = x^2 - x - 1$ であり，$n \geq 2$ については $\Phi_n(x)$ を第 $n+1$ 列で展開すると

$$\Phi_n(x) = -1 + x\Phi_{n-1}(x)$$

という漸化式を得る．以上より

$$\Phi_n(x) = x^{n+1} - x^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1\ .$$

$\boxed{2}$ 区間 $[0,\infty)$ 上の連続函数 f が $f(x)\to 0$ $(x\to\infty)$ を満たし，さらに

$$a_n = \int_{n-1}^{n} f(x)\ dx \qquad (n\geq 1)$$

について，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するものとする．このとき，函数 f は $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であること，すなわち極限

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\ dx$$

が存在することを示せ.

$\boxed{\text{解答}}$

任意の正数 ε を取ると,

$$\begin{aligned}
&\exists L\in\mathbf{N};\quad \Big|\sum_{k=m}^{n} a_k\Big| < \varepsilon \quad (n>m\geq L),\\
&\exists R>0;\quad |f(x)|<\varepsilon \quad (x\geq R).
\end{aligned}$$

$L'=\max\{L,R\}$ とおき，$R_2>R_1>L'+1$ である任意の R_1 と R_2 に対し，$0\leq N-R_2<1$ かつ $0\leq R_1-M<1$ を満たす非負整数 M と N を取ると,

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^{R_2} f(x)\ dx - \int_0^{R_1} f(x)\ dx\Big|\\
&= \Big|-\int_{R_2}^{N} f\ dx + \int_M^N f\ dx - \int_M^{R_1} f\ dx\Big|\\
&\leq \Big|\int_{R_2}^{N} f\ dx\Big| + \Big|\int_M^N f\ dx\Big| + \Big|\int_M^{R_1} f\ dx\Big|\\
&\leq \sup_{R_2\leq x\leq N}|f(x)| + \Big|\sum_{k=M+1}^{N} a_k\Big| + \sup_{M\leq x\leq R_1}|f(x)| < 3\varepsilon
\end{aligned}$$

注意．級数 $\sum a_n$ の収束性より，区間 (R_1,R_2) を含み両端点が整数である最小の区間が $R_1\to\infty$ のとき 0 に収束することを示し，前者の区間と後者の区間の相違は $f(x)\to 0$ $(x\to\infty)$ によって 0 に収束することを示す.

$\boxed{3}$ X_1, X_2 をコンパクト位相空間とする．このとき，直積位相空間 $X_1 \times X_2$ はコンパクトであることを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ をそれぞれ X_1, X_2 の開集合全体とする．$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を直積位相空間 $X_1 \times X_2$ の任意の開被覆とし，

$$\mathcal{U}_1 := \{O \in \mathcal{O}_1 \mid O \times X_2 \text{が } \mathcal{U} \text{ に属する有限個の開集合で被覆される }\}$$

とおく．このとき，$\mathcal{U}_1$ が X_1 の開被覆であることを示す．各 $x \in X_1$ に対して、

$$\mathcal{U}(x) := \{V \in \mathcal{O}_2 \mid {}^\exists U \in \mathcal{O}_1, {}^\exists G \in \mathcal{U} \ \text{ s.t.}, \ x \in U, \ U \times V \subset G\}$$

とおく．$\mathcal{U}$ が $X_1 \times X_2$ の開被覆であるので，$\mathcal{U}(x)$ は X_2 の開被覆である．仮定より，X_2 がコンパクトなので，有限個の $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{U}(x)$ が存在して，$X_2 \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m$ が成り立つ．$\mathcal{U}(x)$ の定義より，各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，

$${}^\exists U_i \in \mathcal{O}_1, {}^\exists G_i \in \mathcal{U} \text{ s.t.}, \ x \in U_i, \ U_i \times V_i \subset G_i$$

である．そこで．$O := U_1 \cap \cdots \cap U_m$ とおけば，$x \in O, O \in \mathcal{O}_1, O \times X_2 \subset G_1 \cup \cdots \cup G_m$ が成り立つ．したがって，$\mathcal{U}_1$ の定義より，$O \in \mathcal{U}_1$ である．各 $x \in X_1$ に対して、このような O をとると X_1 を被覆する．よって，$\mathcal{U}_1$ が X_1 の開被覆であることが示された．

仮定より，X_1 はコンパクトなので，有限個の開集合 $O_1, \ldots O_n \in \mathcal{U}_1$ s.t.,$X_1 \subset O_1 \cup \cdots \cup O_n$ が存在する．各 $j \in \{1, \ldots, n\}$ について，$O_j \times X_2$ は $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合によって被覆されるので，$(O_1 \times X_2) \cup \cdots \cup (O_n \times X_2)$ も $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合によって被覆される．$X_1 \times X_2 \subset (O_1 \times X_2) \cup \cdots \cup (O_n \times X_2)$ なので．$X_1 \times X_2$ は $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合によって被覆される．

$\boxed{4}$ 成分が $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ の n 次正方行列全体を $M(n, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ で表す.

$$GL(n, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) := \{A \in M(n, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}); \det(A) \neq 0\}$$

に対し $GL(n, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ の元の個数を求めよ.

$\boxed{\text{解答}}$

$A \in GL(n, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ は 1 次独立な行ベクトル $\mathbf{a}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ を用いて

$$A = (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$$

と書ける．このような $\mathbf{a}_i$ の選び方は全部で $(3^n - 1)(3^n - 3) \cdots (3^n - 3^{n-1})$ 通りある．したがって元の個数は

$$3^{1/2 \cdot n(n-1)}(3^n - 1) \cdots (3 - 1)$$

である.

$\boxed{5}$ 2×2 の実行列からなる

$$N := \{A : 2 \times 2 \text{ 実行列} \mid \mathrm{tr}(A) = 0,\ A^2 = O)\}$$

を考える．このとき，$N \setminus \{O\}$ は C^∞-多様体になることを示せ．ただし，O は零行列である.

$\boxed{\text{解答}}$

$A := \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ とする.

$$A^2 = O \Longleftrightarrow x^2 + yz = 0$$

である．そこで，$f := x^2 + yz$ とし，その Jacobi 行列 J を求めると

$$J = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x, z, y)$$

となる．$A \in N \setminus \{O\}$ において，$J \neq 0$ である．よって，陰函数定理より，N は A の近傍で 2 次元の C^∞-多様体である.

$\boxed{6}$ k を正数とする．このとき次の積分を計算せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\,dx.$$

解答

$f(z) = \dfrac{e^{ikz}}{1+z^2}$ $(z \in \mathbb{C}$) とおく．実軸上の区間 $[-r, r]$ を右に進み，半円 $z = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$ を正の向きに回る閉曲線を C_r とする（ただし，$r > 1$．留数定理により

$$\begin{aligned}\int_{C_r} f(z)\,dz &= 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=i} f(z) \\ &= 2\pi i\,\frac{e^{-k}}{2i} \\ &= \pi e^{-k}.\end{aligned}$$

一方で，ある定数 M が存在して，$|z| = r$, $\mathrm{Im}\, z \ge 0$ のとき，$|f(z)| \le M/r^2$ が成立する．$r \to \infty$ のとき，

$$\left|\int_{|z|=r, \mathrm{Im}\, z \ge 0} f(z)\,dz\right| \le \frac{M\pi r}{r^2} \to 0$$

となるので，$\sin kx/(1+x^2)$ が奇函数であることに注意すると，

$$\int_{C_r} f(z)\,dz \;\to\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kz + i\sin kx}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kz}{1+x^2}\,dx.$$

以上より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kz}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-k}.$$