

数学基礎試験問題（2010年度第1回）

- 1 n を正の整数， E を複素線型空間

$$E = \{F(x) \mid F(x) \text{ は次数が } n \text{ 以下の複素係数一変数多項式}\}$$

とし，その上の線型写像 $f: E \rightarrow E$,

$$f(F(x)) = (xF(x) + F(1)) \text{ を } x^{n+1} \text{ で割った余り}$$

を考える．このとき，

- (1) 基底 $1, x, \dots, x^n$ に関する f の行列表示を求めよ．
- (2) f の特性多項式を求めよ．

注. 元の問題にはミスがありましたので， f の定義を修正してあります．

- 2 区間 $[0, \infty)$ 上の連続関数 f が $f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) を満たし，さらに

$$a_n = \int_{n-1}^n f(x) dx \quad (n \geq 1)$$

について，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するものとする．このとき，関数 f は $[0, \infty)$ 上で広義積分可能であること，すなわち極限

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx$$

が存在することを示せ．

- 3 X_1, X_2 をコンパクト位相空間とする．このとき，直積位相空間 $X_1 \times X_2$ はコンパクトであることを示せ．

- 4 成分が $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ の n 次正方行列全体を $M(n, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ で表す．

$$GL(n, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) := \{A \in M(n, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}); \det(A) \neq 0\}$$

に対し $GL(n, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ の元の個数を求めよ．

- 5 2×2 の実行列からなる

$$N := \{A : 2 \times 2 \text{ 実行列} \mid \operatorname{tr}(A) = 0, A^2 = O\}$$

を考える．このとき， $N \setminus \{O\}$ は C^∞ -多様体になることを示せ．ただし， O は零行列である．

- 6 k を正数とする．このとき次の積分を計算せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2} dx.$$