数学基礎試験 問題と解答 （2009 年度 第 2 回）

$\boxed{1}$ 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列のなす集合を $M(n,\mathbb{C})$ と表すことにする。いま、m 次正方行列 $A \in M(m,\mathbb{C})$ および n 次正方行列 $B \in M(n,\mathbb{C})$ に対して、$m+n$ 次正方行列 $C \in M(m+n,\mathbb{C})$ を次で与える。

$$C = \begin{pmatrix} A & O_{m,n} \\ O_{n,m} & B \end{pmatrix}$$

ここで、$O_{m,n}, O_{n,m}$ はそれぞれ m 行 n 列、n 行 m 列の零行列を表す。このとき、C の最小多項式は A の最小多項式と B の最小多項式の最小公倍多項式であることを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$ 複素係数多項式 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ に対して、

$$\begin{aligned} f(C) &= \sum_{k=0}^{N} a_k \begin{pmatrix} A & O_{m,n} \\ O_{n,m} & B \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{N} a_k \begin{pmatrix} A^k & O_{m,n} \\ O_{n,m} & B^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k A^k & O_{m,n} \\ O_{n,m} & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k B^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) & O_{m,n} \\ O_{n,m} & f(B) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

m 次、n 次および $m+n$ 次零行列をそれぞれ O_m, O_n, O_{m+n} と表すとする。すると、上記のことより $f(C) = O_{m+n}$ であることと、$f(A) = O_m$ かつ $f(B) = O_n$ であることは同値である。いま、C の最小多項式を $f_C(x)$、A の最小多項式と B の最小多項式の最小公倍多項式を $f_{A,B}(x)$ と表すとする。すると、$f_C(C) = O_{m+n}$ より $f_C(A) = O_m$, $f_C(B) = O_n$ が成り立つから、$f_C(x)$ は A の最小多項式および B の最小多項式で割り切れる。よって、$f_C(x)$ は $f_{A,B}(x)$ で割り切れる。逆に、$f_{A,B}(x)$ は A の最小多項式で割り切れるから $f_{A,B}(A) = O_m$。同様にして $f_{A,B}(B) = O_n$。よって $f_{A,B}(C) = O_{m+n}$ となるから、$f_{A,B}(x)$ は $f_C(x)$ で割り切れる。以上により、$f_C(x)$ は $f_{A,B}(x)$ と (定数倍を除いて) 一致する。

$\boxed{2}$ 位数 4 の群を同型を除いてすべて求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

G を位数 4 の群とする。G が位数 4 の元を少なくとも 1 つもつとき、明らかに G は位数 4 の巡回群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である。以下、G の任意の元の位数は 2 か 1 としてよい。$G = \{e, a, b, c\}$ とかく。e は単位元とする。このとき、$a^2 = b^2 = c^2 = e$ である。これから $a = a^{-1}$、$b = b^{-1}$、$c = c^{-1}$ が従う。また、$a \neq e$、$b \neq e$、$b \neq a$ より $ab = c$ が従い、$ab = c = c^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$ を得る。よって G は a と b で生成されるアーベル群である。全射群準同型 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G : (m, n) \mapsto a^m b^m$ は well-defined で、核は $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ であることがわかる。よって $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

$\boxed{3}$ $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする。写像 $f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ を

$$f(z,w) = (z^2 w, zw^2)$$

$(z, w \in S^1)$ で定めるとき、f の写像度を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

$U = \{(z,w) \in S^1 \times S^1 \mid z \neq -1, w \neq -1\} \subset S^1 \times S^1$ に対して、写像 $\varphi : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to U$ を $\varphi(s,t) = (e^{2\pi\sqrt{-1}s}, e^{2\pi\sqrt{-1}t})$ で定めると、φ は同相写像となる。ω を 1 の原始 3 乗根とすると、$f^{-1}(1,1) = \{(1,1), (\omega,\omega), (\omega^2,\omega^2)\}$ となる。また、U は $(1,1), (\omega,\omega), (\omega^2,\omega^2)$ の近傍となり、φ はその座標を与える。この座標近傍において、

$$df_x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(x = (1,1), (\omega,\omega), (\omega^2,\omega^2))$ となり、$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ より、$(1,1)$ は f の正則値であることがわかる。したがって、$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$ より、f の写像度は 3 である.

$\boxed{4}$ $X = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に次の同値関係をいれる：$z \sim w$ とは、0 でない複素数 c が存在して $z = cw$ となること。このとき商空間 $X/\sim$ はコンパクトであることを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$

$S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ を単位球面とする。S^{2n-1} に次の同値関係をいれる：$z \sim w$ とは、0 でない絶対値 1 の複素数 c が存在して $z = cw$ となること。このとき $X/\sim = S^{2n-1}/\sim$ である。したがって、$X/\sim$ はコンパクト集合 S^{2n-1} の連続写像 (商写像)$S^{2n-1} \to S^{2n-1}/\sim$ による像なのでコンパクト集合である。

$\boxed{5}$ 次の函数項級数は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{1+n^4x^2}$$

$\boxed{\text{解答}}$

不等式

$$|\sin x| \leq |x|$$

を用いると、$n^2x = y$ とおけば、任意の自然数 $p,\ q\ (p \leq q)$ に対し

$$\left|\sum_{n=p}^{q} \frac{\sin x}{1+n^4x^2}\right| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{|y|}{1+y^2} \sum_{n=p}^{q} n^{-2}$$

が成り立つ。無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ は収束するので、Cauchy の判定法より、問題の級数は一様収束する。

$\boxed{6}$ 複素数 $a,\ b$ と正数 r は $|a| < r < |b|$ を満たすものとし、$f(z)$ は半径 $|b|$ の円板内で正則とする。このとき、次の複素線積分を計算せよ。

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2(z-b)} dz$$

ただし、C は原点を中心とする半径 r の正の向きの円周とする。

$\boxed{\text{解答}}$

$$\frac{1}{(z-a)^2(z-b)} = -\frac{1}{(a-b)^2}(z-a)^{-1} + \frac{1}{a-b}(z-a)^{-2} + \frac{1}{(b-a)^2}(z-b)^{-1}$$

より、Cauchy の積分公式より

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2(z-b)} dz = 2\pi i \left\{ -\frac{f(a)}{(a-b)^2} + \frac{f'(a)}{a-b} \right\}.$$