

数学基礎試験問題 (2009年度第2回)

- 1 複素数体 \mathbb{C} 上の n 次正方行列のなす集合を $M(n, \mathbb{C})$ と表すことにする。いま、 m 次正方行列 $A \in M(m, \mathbb{C})$ および n 次正方行列 $B \in M(n, \mathbb{C})$ に対して、 $m+n$ 次正方行列 $C \in M(m+n, \mathbb{C})$ を次で与える。

$$C = \begin{pmatrix} A & O_{m,n} \\ O_{n,m} & B \end{pmatrix}$$

ここで、 $O_{m,n}, O_{n,m}$ はそれぞれ m 行 n 列、 n 行 m 列の零行列を表す。このとき、 C の最小多項式は A の最小多項式と B の最小多項式の最小公倍多項式であることを示せ。

- 2 位数 4 の群を同型を除いてすべて求めよ。

- 3 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする。写像 $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ を

$$f(z, w) = (z^2w, zw^2)$$

$(z, w \in S^1)$ で定めるとき、 f の写像度を求めよ。

- 4 $X = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に次の同値関係をいれる： $z \sim w$ とは、0 でない複素数 c が存在して $z = cw$ となること。このとき商空間 X/\sim はコンパクトであることを示せ。

- 5 次の函数項級数は \mathbb{R} 上一様収束することを示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{1+n^4x^2}$$

- 6 複素数 a, b と正数 r は $|a| < r < |b|$ を満たすものとし、 $f(z)$ は半径 $|b|$ の円板内で正則とする。このとき、次の複素線積分を計算せよ。

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2(z-b)} dz$$

ただし、 C は原点を中心とする半径 r の正の向きの円周とする。