数学基礎試験 問題と解答 （2009 年度 第 1 回）

$\boxed{1}$ $f(z)$ は $|z| < 1$ で正則で、$f(z) = 0$ とする。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ は $|z| < 1$ で正則となることを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$

仮定より、ある $\epsilon_0 \in (0,1)$ が存在して

$$|f(z)| \leq 1 \qquad (\forall |z| \leq \epsilon_0)$$

が成立。よってシュワルツの補題より

$$|z| \leq \epsilon_0 \implies |f(z)| \leq \frac{1}{\epsilon_0}|z| \tag{1}$$

今 $|z| < 1$ のとき $|z|^n \to 0$ $(n \to \infty)$ だから、n が十分大のとき

$$|z^n| \leq \epsilon_0$$

よって (1) より

$$|f(z^n)| \leq \frac{1}{\epsilon_0}|z|^n$$

よって無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ は $|z| < 1$ で広義一様収束するので正則である。

$\boxed{2}$ 正数 α, β に対し、広義積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)^{-\alpha} \left[1+(x^2+y^2)^{\beta}\right]^{-1/2} dx\, dy$$

が収束するような、α, β の範囲を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ の Jacobian が r であることに注意すれば、問題の 2 重積分は

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r^{-2\alpha}(1+r^{2\beta})^{-1/2} r\, dr$$

となる。この被積分関数を $f(r)$ とすれば、

$$f(r) \sim r^{-2\alpha+1} \qquad (r \to 0 \text{ のとき})$$
$$f(r) \sim r^{-2\alpha+1-\beta} \quad (r \to \infty \text{ のとき})$$

であるから、収束するのは

$$\alpha < 1 \quad \text{かつ} \quad \beta > 2(1-\alpha)$$

$\boxed{3}$ V を基底 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ をもつ複素数体上のベクトル空間とし、V 上の一次変換 f を

$$f(v_2) = v_1, f(v_3) = v_2, \ldots, f(v_n) = v_{n-1}, f(v_1) = v_n$$

により定める。このとき f の固有値をすべて求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

基底 $v_1, \ldots, v_n$ に関する f の行列表示は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

となる。この行列の固有多項式は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t & -1 & & & \\ & t & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ -1 & & & & t \end{vmatrix} &= t \begin{vmatrix} t & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & t \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -1 & & & \\ & t & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ -1 & & & & t \end{vmatrix} \\ &= t^n - 1 \end{aligned}$$

となり、従って、f の固有値は $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ となる。ただし、ω は 1 の原始 n 乗根とする。

$\boxed{4}$ Gを群とし、HをGの空でない有限部分集合とする。任意の2元$x, y \in H$に対して$xy \in H$が成り立てば、HはGの部分群であることを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$

Hの任意の元xに対して、xの逆元$x^{-1} \in G$がHに入っていることを示せば十分である。Hの元の個数をnとすると、$\{x, x^2, \ldots, x^{n+1}\}$の中に同じ元がかならず存在する。つまり、$x^a = x^b$なる$1 \leq a < b \leq n+1$が存在する。これから$x^{b-a}$が単位元であることが従う。また、$x^{b-a-1}$が$x$の逆元であることも分かる。

$\boxed{5}$ 正の実数 $r > 0$ 全体のなす乗法群 G は $\mathbb{C}$ にスカラー倍で作用する。つまり z を rz にうつす。このとき、商空間 $\mathbb{C}/G$ はハウスドルフ空間でないことを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$

商写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/G$ で、実軸の正の部分は 1 点にうつる。この点を p と書く。また、原点の像を q と書く。ここで、原点にいくらでも近い正の実数が存在することから、p と q は分離できない。したがって $\mathbb{C}/G$ はハウスドルフ空間ではない。

$\boxed{6}$ $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |\,z\,| = 1\}$ とする。a, b, c を自然数とし、写像 $f : S^1 \times S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1 \times S^1$ を $f(z, w, u) = (z^a, w^b, u^c)$ で定める。

(1) f の臨界点を決定せよ。

(2) f の写像度を求めよ。（説明も書くこと）

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 極座標で、f は $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mapsto (a\theta_1, b\theta_2, c\theta_3)$ と表せるので、f は臨界点をもたない。

(2) f は向きを保ち、1 点の逆像は abc 個の点よりなるので、写像度は abc 。