

数学基礎試験問題 (2009年度 第1回)

- 1]  $f(z)$  は  $|z| < 1$  で正則で、 $f(0) = 0$  とする。このとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$  は  $|z| < 1$  で正則となることを示せ。

- 2] 正数  $\alpha, \beta$  に対し、広義積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2)^{-\alpha} \left[ 1 + (x^2 + y^2)^\beta \right]^{-1/2} dx dy$$

が収束するような、 $\alpha, \beta$  の値の範囲を求めよ。

- 3]  $V$  を基底  $v_1, v_2, \dots, v_n$  をもつ複素数体上のベクトル空間とし、 $V$  上の一次変換  $f$  を

$$f(v_2) = v_1, f(v_3) = v_2, \dots, f(v_n) = v_{n-1}, f(v_1) = v_n$$

により定める。このとき  $f$  の固有値をすべて求めよ。

- 4]  $G$  を群とし、 $H$  を  $G$  の空でない有限部分集合とする。任意の 2 元  $x, y \in H$  に対して  $xy \in H$  が成り立てば、 $H$  は  $G$  の部分群であることを示せ。

- 5] 正の実数  $r > 0$  全体のなす乗法群  $G$  は複素平面  $\mathbb{C}$  にスカラー倍で作用する。つまり複素数  $z$  を  $rz$  にうつす。このとき、商空間  $\mathbb{C}/G$  はハウスドルフ空間ではないことを示せ。

- 6]  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  とする。 $a, b, c$  を自然数とし、写像  $f : S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 \times S^1$  を  $f(z, w, u) = (z^a, w^b, u^c)$  で定める。

(1)  $f$  の臨界点を決定せよ。

(2)  $f$  の写像度を求めよ。(説明も書くこと)