数学基礎実習筆記試験問題 （**2008** 年度 第 **2** 回）

$\boxed{1}$ 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の $n$ 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & 0 & & & -a_{n-1} \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式は $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$ で与えられることを示せ.

$\boxed{\text{解答}}$

$n$ に関する帰納法で示す. 第 1 列目についての展開により

$$\det(tE - A) = \begin{vmatrix} t & & & & a_n \\ -1 & t & & & a_{n-1} \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & t & a_2 \\ & & & -1 & t + a_1 \end{vmatrix}$$

$$= t(t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) + \begin{vmatrix} 0 & & & & a_n \\ -1 & t & & & a_{n-2} \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & t & a_2 \\ & & & -1 & t + a_1 \end{vmatrix}.$$

第 2 項目をさらに第 1 列目で展開すれば, これは $a_n$ に等しくなる.

$\boxed{2}$ 次の積分を計算せよ．

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2y^2\,dx\,dy$$

$\boxed{\text{解答}}$

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2y^2\,dx\,dy &= \int_{x^2\le 1} x^2\,dx \int_{y^2\le 1-x^2} y^2\,dy \\
&= \int_{x^2\le 1} x^2\,dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy \\
&= 2\int_{x^2\le 1} x^2\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy \\
&= 2\int_{x^2\le 1} x^2\,dx \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{3/2}\,dx \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 x^2(1-x^2)^{3/2}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{u}(1-u)^{3/2}\,du \quad (u=x^2,\ du=2xdx) \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 u^{3/2-1}(1-u)^{5/2-1}\,du \\
&= \frac{2}{3}B\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{3}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{2}{3}\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{3!} = \frac{1}{24}\pi.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$

曲座標を使っても出来る． $r = x\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ だから Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

よって

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leq 1} x^2y^2\,dx\,dy &= \int_0^{pi} d\theta \int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta\,dr \\ &= \int_0^1 r^5\,dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{24}.\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 自由アーベル群 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ の部分群 $L$ で

$$|(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/L| = 2$$

となるものを全て求めよ.

$\boxed{\text{解答}}$

$|(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/L| = 2$ なので, 群 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/L$ の単位元以外の元の位数は 2 である. これは任意の $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に対して $2(x,y)\in L$ が成り立つことを意味するので $L\supset 2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$ である. よって $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z})$ の指数 2 の部分群を求めれば良い. いま, $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z})$ の指数 2 の部分群は

$$\{(0,0),\,(1,0)\},\quad \{(0,0),\,(0,1)\},\quad \{(0,0),\,(1,1)\}$$

で尽くされるので

$$\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z},\quad 2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\quad \{(x,y)|\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|\,x\equiv y\,(2)\}$$

が $L$ の全体である.

$\boxed{4}$ 2 次のエルミート行列で行列式が 1 となるもの全体のなす集合を $M$ とする. このとき, 次に答えよ.

(1) $M$ が $C^\infty$ 級多様体となることを示せ.

(2) $M$ がコンパクトでないことを示せ.

$\boxed{\text{解答}}$

(1)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & x+iy \\ x-iy & d \end{pmatrix} \middle| \; a, x, y, d \in \mathbb{R},\ ad - x^2 - y^2 = 1 \right\}.$$

$f(a, x, y, d) := ad - x^2 - y^2 - 1$ とおく.

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^1;\ C^\infty\text{-map}.$$

$f$ のヤコビ行列 $Jf$ は

$$Jf = \left( \frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial d} \right) = (d, -2x, -2y, a).$$

$Jf = (0, 0, 0, 0)$ となるのは $a = x = y = d = 0$ のときに限る. しかし, このとき $0 \cdot 0 - 0^2 - 0^2 = 0 \neq 1$ だから $M$ の元ではない. よって $M$ のすべての点で $Jf \neq (0, 0, 0, 0)$. そこで陰関数定理より $M = f^{-1}(0)$ は $C^\infty$ 級多様体である.

(2)

$n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ とすると $A_n \in M$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$) である. $\{A_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ は有界ではないので $M$ はコンパクトではない.

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする．その $n$ 階導関数 $f^{(n)}(x)$ について

$$f^{(n)}(x) = O(x^{-n-2}) \qquad |x| \to \infty$$

を示せ．

$\boxed{\text{解答}}$

まず $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ を部分分数に分ける．虚数単位 $\sqrt{-1}$ を $i$ と書くことにして，

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

である．これを $n$ 回微分すると

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right)$$

であり，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} &= \frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(1+x^2)^{n+1}} \\ &= \frac{O(x^n)}{(1+x^2)^{n+1}} = O(x^{-n-2}) \qquad (|x| \to \infty)\end{aligned}$$

なので，$|x| \to \infty$ で $f^{(n)}(x) = O(x^{-n-2})$ である．

$\boxed{6}$ 複素平面において $C$ を原点を中心とする半径 2 の正の向きの円周とする. 次の積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{dz}{(2z-\pi)\sin z}$$

$\boxed{\text{解答}}$

$\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ は $z = n\pi, n = 0, \pm 1, \cdots$ なので,

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

とおくと, $g(z)$ は正則で

$$g(z) \neq 0,\ |z| \leq 2$$

をみたす.

Cauchy の積分公式より,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{(2z-\pi)\sin z} &= \int_C \frac{dz}{(2z-\pi)zg(z)} \\ &= \int_C \frac{1}{\pi g(z)} \left\{ \frac{1}{z-(\pi/2)} - \frac{1}{z} \right\} dz \\ &= 2i \left\{ \frac{1}{g(\pi/2)} - \frac{1}{g(0)} \right\} \\ &= i\,(\pi - 2)\,. \end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\text{別解}}$

$\dfrac{1}{(2z-\pi)\sin z}$ は $|z| \leq 2$ の範囲では 2 つの 1 位の極 $z = 0,\ \pi/2$ をもつので, そこでの留数の和は

$$\frac{1}{2} + \frac{-1}{\pi}.$$

留数定理より

$$\int_C \frac{dz}{(2z-\pi)\sin z} = 2\pi i\left(\frac{1}{2} + \frac{-1}{\pi}\right) = i(\pi - 2).$$