

数学基礎実習筆記試験問題（2008年度 第2回）

- 1 複素数体  $\mathbb{C}$  上の  $n$  次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_n \\ 1 & 0 & & -a_{n-1} \\ & 1 & \cdots & \vdots \\ & & \cdots & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式は  $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$  で与えられることを示せ.

- 2 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y^2 dx dy$$

- 3 自由アーベル群  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  の部分群  $L$  で

$$|(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/L| = 2$$

となるものを全て求めよ.

- 4 2 次エルミート行列で行列式が 1 となるもの全体のなす集合を  $M$  とする. このとき, 次に答えよ.

- (1)  $M$  が  $C^\infty$  級多様体となることを示せ.
- (2)  $M$  がコンパクトでないことを示せ.

- 5  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  とする. その  $n$  階導関数  $f^{(n)}(x)$  について

$$f^{(n)}(x) = O(x^{-n-2}) \quad |x| \rightarrow \infty$$

を示せ.

- 6 複素平面において  $C$  を原点を中心とする半径 2 の正の向きの円周とする. 次の積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{dz}{(2z - \pi) \sin z}$$