数学基礎実習筆記試験問題解答 （2008 年度 第 1 回）

$\boxed{1}$ x を変数とする 3 次以下の多項式 $P(x)$ の全体がつくる線形空間に基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ をとる.

(1) この空間における線形写像

$$P(x) \mapsto P(a+x) \qquad (a \text{ は定数})$$

の表現行列 A を求めよ.

(2) A の最小多項式を求めよ.

[解答] (1) 題意の線形写像による，$1, x, x^2, x^3$ の行き先を計算する：

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1, \\ x &\longmapsto a + x, \\ x^2 &\longmapsto (a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2, \\ x^3 &\longmapsto (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3. \end{aligned}$$

よって，求める表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ & 1 & 2a & 3a^2 \\ & & 1 & 3a \\ \multicolumn{2}{c}{\Large 0} & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) E を 4 次単位行列として，$A - E$ を考えると，$(A-E)^4 = O$（零行列）であるが，$n = 1, 2, 3$ については $(A-E)^n \neq O$ である．よって，最小多項式は

$$(x-1)^4$$

で与えられる．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ 上 C^2 級の関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$ をみたすとする．このとき，区間 $[0,1]$ で次の関数項級数は一様収束することを示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{x}{n}\right).$$

[解答] f が $\mathbb{R}$ 上 2 回微分可能であり，$f(0) = 0$ なので，

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n}f'(0) + \left(\frac{x}{n}\right)^2 \frac{f''(\theta_n x)}{2}$$

と書ける．ここで，θ_n は $0 < \theta_n < \frac{1}{n}$ なる定数である．ところで，f は $\mathbb{R}$ 上 C^2 級であったから，f'' は連続．よって，x が $[0,1]$ を動く限り，任意の $n \geq 1$ について $|f''(\theta_n x)| \leq C$ なる定数（x にも n にも依存しない）がとれる．

題意の関数項級数を計算すると，

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^n f\left(\frac{x}{n}\right) = xf'(0)\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{n} + \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{f''(\theta_n x)}{n^3}$$

となるが，右辺の第一項目は

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

が収束するので，$[0,1]$ 上で一様収束する．第二項目も，

$$\left|(-1)^n\frac{f''(\theta_n x)}{n^3}\right| \leq \frac{C}{n^3}$$

で，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ が収束するので，優級数定理から，やはり $[0,1]$ 上で一様収束する．以上より，題意の関数項級数は $[0,1]$ 上で一様収束する．

$\boxed{3}$ $\mathbb{Z}$ 係数の多項式環 $R=\mathbb{Z}[x]$ のイデアル (n, x^2+1) が素イデアルとなる 3 以上 20 以下の自然数 n を全て求めよ．

[解答] (n, x^2+1) が R の素イデアルであれば，$\mathbb{Z}$ との共通部分

$$n\mathbb{Z}=(n, x^2+1)\cap\mathbb{Z}$$

は $\mathbb{Z}$ の素イデアルである．よって n は素数である．また，n は 3 以上なので奇素数である．

いま，$n=p$ とおき，$\mathbb{F}_p$ を位数 p の有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とすると，

$$R/(p, x^2+1)\simeq\mathbb{F}_p[x]/(x^2+1)$$

である．よって，(p, x^2+1) が素イデアルである為の必要十分条件は，x^2+1 が $\mathbb{F}_p$ の既約多項式となることである．これは $\mathbb{F}_p$ に 1 の原始 4 乗根が存在しないことと同値である．

ここで $\mathbb{F}_p$ の乗法群 $\mathbb{F}_p^\times$ が位数 $p-1$ の巡回群であることを使うと，$\mathbb{F}_p$ に 1 の原始 4 乗根が存在しないことは $4\nmid p-1$ つまり $p\equiv 3 \mod (4)$ と同値であることがわかる．よって，(n, x^2+1) が素イデアルとなる 3 以上 20 以下の自然数 n は

$$3, 7, 11, 19$$

である．

$\boxed{4}$ $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$ とする.

(1) S が C^∞ 級の多様体であることを示せ.

(2) S の点 p における S の接空間 T_pS を求めよ.

(3) S から S への写像

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_1,-x_2,-x_3,-x_4)$$

の次数（写像度）$\deg F$ を求めよ.

[解答] (1) $f(x_1,x_2,x_3,x_4):=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-1$ とおく．このとき、f の勾配ベクトル場を求めると,

$$\begin{aligned}&\mathrm{grad}\ f(x_1,x_2,x_3,x_4)\\ =&\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,x_4),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,x_4),\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4),\frac{\partial f}{\partial x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right)\\ =&2(x_1,x_2,x_3,x_4)\end{aligned}$$

である．S 上の任意の点 (x_1,x_2,x_3,x_4) において，$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$ より，$\mathrm{grad}\ f(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq(0,0,0,0)$ である．よって，陰関数定理により，S は C^∞ 級の多様体である．

(2) $p=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S$ に対して，

$$\begin{aligned}T_pS&=\{(a,b,c,d)\in\mathbf{R^4}\,|\,(a-x_1,b-x_2,c-x_3,d-x_4)\cdot\mathrm{grad}f(p)=0\}\\ &=\{(a,b,c,d)\in\mathbf{R^4}\,|\,x_1a+x_2b+x_3c+x_4d=1\}.\end{aligned}$$

(3) 次の４つの鏡映 r_1,r_2,r_3,r_4 を考える．

$$\begin{cases}r_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_1,x_2,x_3,x_4)\\ r_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,-x_2,x_3,x_4)\\ r_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,-x_3,x_4)\\ r_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,x_3,-x_4)\end{cases}$$

このとき，

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=r_1\circ r_2\circ r_3\circ r_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

である．一般に２つの写像 g、h に対して，$\deg\,(g\circ h)=(\deg\,g)(\deg\,h)$ が成り立つ．また，各鏡映 r_i $(i\in\{1,2,3,4\})$ について，$\deg\,r_i=-1$ である．よって，$\deg\,F=(-1)^4=1$ である．

$\boxed{5}$ $0 < p < 2$ とするとき, 広義積分

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx\,, \qquad J = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{p+1}}\,dx$$

は共に収束し $I = pJ$ であることを示せ.

[解答] 次に注意する：

$$(*) \qquad |1-\cos x| \le \min\{2, x^2/2\}$$

（例えば $1-\cos x = \int_0^x \sin y dy$ とすると見やすい.）これより

$$0 \le \frac{1-\cos x}{x^{p+1}} \le \begin{cases} \frac{1}{2x^{p-1}} & (x \in (0,1]), \\ \frac{2}{x^{p+1}} & (x \in [1,\infty)). \end{cases}$$

今，$p-1 < 1 < p+1$ より，上式右辺の関数はそれぞれの範囲で可積分．したがって J は収束する．

一方，$0 < a < b < \infty$ に対し

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sin x}{x^p}dx &= \int_a^b \frac{(1-\cos x)'}{x^p}dx \\ &= \left[\frac{1-\cos x}{x^p}\right]_a^b + p\int_a^b \frac{1-\cos x}{x^{p+1}}dx. \end{aligned}$$

再度 $(*)$ に注意しつつ $a \to 0$，$b \to \infty$ とすると，上式右辺は pJ に収束する．従って左辺も収束し $I = pJ$ となる。

$\boxed{6}$ 次の複素線積分を計算せよ.

$$\int_C e^{\frac{1}{z}}\,dz.$$

ただし C は原点 0 を中心とする正方形の周を反時計回りに回る曲線である.

[解答] $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ は $z\neq 0$ で正則であるから，経路を単位円周 $\{|z|=1\}$ に変更しても，結果は同じである．また,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

であるが，この級数は $|z|=1$ 上で一様収束する．したがって，題意の積分を，項別積分によって計算することができる．各項の積分を計算すると,

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z^n}dz=\begin{cases}2\pi i & (n=1)\\ 0 & (n\neq 1)\end{cases}$$

なので，求める積分の値は

$$\int_C e^{\frac{1}{z}}\,dz=2\pi i.$$