

数学基礎実習筆記試験問題 (2008 年度 第 1 回)

- 1 x を変数とする 3 次以下の多項式 $P(x)$ の全体がつくる線形空間に基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ をとる.

(1) この空間における線形写像

$$P(x) \mapsto P(a+x) \quad (a \text{ は定数})$$

の表現行列 A を求めよ.

(2) A の最小多項式を求めよ.

- 2 \mathbb{R} 上 C^2 級の関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$ をみたすとする. このとき, 区間 $[0, 1]$ で次の関数項級数は一様収束することを示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{x}{n}\right).$$

- 3 \mathbb{Z} 係数の多項式環 $R = \mathbb{Z}[x]$ のイデアル $(n, x^2 + 1)$ が素イデアルとなる 3 以上 20 以下の自然数 n を全て求めよ.

- 4 $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ とする.

(1) S が C^∞ 級の多様体であることを示せ.

(2) S の点 p における S の接空間 $T_p S$ を求めよ.

(3) S から S への写像

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$$

の次数 (写像度) $\deg F$ を求めよ.

- 5 $0 < p < 2$ とするとき, 広義積分

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad J = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^{p+1}} dx$$

は共に収束し $I = pJ$ であることを示せ.

- 6 次の複素線積分を計算せよ.

$$\int_C e^{\frac{1}{z}} dz.$$

ただし C は原点 0 を中心とする正方形の周を反時計回りに回る曲線である.