数学基礎実習筆記試験問題解答（ 2007 年度第 2 回）

$\boxed{1}$ $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を n 次の実正方行列全体のなす実ベクトル空間とする．$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 V を

$$V = \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AB = O\}$$

で定義する．ここで O は零行列である．このとき, 次の問いに答えよ.

(1) V は $\mathrm{M}_n(\mathrm{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(2) $\dim V$ を $r = \mathrm{rank} A$ を用いて表わせ.

[**解答**] $\boxed{1}$

(1) (i) $O \in V$ より $V \neq \emptyset$. (ii) $B,\ B' \in V$ なら $A(B+B') = AB + AB' = O$ より $B + B' \in V$. (iii) $B \in V,\ c \in \mathbb{R}$ なら $A(cB) = c(AB) = O$ より $cB \in V$. 以上 (i)-(iii) より V は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間になる.

(2) （解答その１）n 次正則行列 P, Q を用いて $PAQ = F_n(r)$ と階数標準形に変形する．ただし

$$F_n(r) = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

よって $A = P^{-1}F_n(r)Q^{-1}$ である．ここで $AB = O \iff F_n(r)Q^{-1}B = O$ で あることに注意する．線型変換 $f\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を $f(B) = Q^{-1}B$ で定めると，これは同型写像で,

$$f(V) = \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid F_n(r)B = O\}$$

となる．$\dim V = \dim f(V)$ だから $A = F_n(r)$ の場合に $\dim V$ を計算すればよい．そこで

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \ (B_1 \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathbb{R}),\ B_2 \in \mathrm{M}_{n-r,n}(\mathbb{R})),$$

とブロック分解すると $F_n(r)B = \begin{pmatrix} B_1 \\ O_{n-r,n} \end{pmatrix}$ となり $F_n(r)B = O \ \Leftrightarrow\ B_1 = O_{r,n}$. これより $B \in V$ となるためには $B = \begin{pmatrix} O_{r,n} \\ B_2 \end{pmatrix}$ の形であることが必要十分であることがわかる．これより $\dim V = \dim \mathrm{M}_{n-r,n}(\mathbb{R}) = n(n-r)$ を得る.

(2)（解答その２）$B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$（$\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ は B の第 i 列）とすると $AB = O \iff A\mathbf{b}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. よって行列 A で定まる線型変換 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\mathbf{x} \to A\mathbf{x})$ を再び A と表すならば，$AB = O \iff \mathbf{b}_i = \mathrm{Ker} A$ $(i = 1, \ldots, n)$ となる．つまり

$$V = \{(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \mid \mathbf{b}_i \in \mathrm{Ker} A\ (i = 1, \ldots, n)\} \simeq (\mathrm{Ker} A)^{\oplus n} (n \text{ 個の直和}).$$

ここで $\dim \mathrm{Ker} A = n - \mathrm{rank} A = n - r$ だから $\dim V = n(n-r)$.

$\boxed{2}$ 正数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ をみたすとする．このとき, 正数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関する次の条件 (1), (2) は同値であることを示せ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する.
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$ は収束する.

[**解答**] $\boxed{2}$
非負級数であるから，収束を示すには上から収束する級数で抑えればよい.
　まず (1) $\Rightarrow$ (2) を示す．不等式 $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ を用いて

$$\sum_n (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leq \sum_n 2(\sqrt{a_n}^2 + \sqrt{b_n}^2) = 2(\sum_n a_n + \sum_n b_n) < \infty.$$

これで $\sum_n b_n$ が収束するならば $\sum_n (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$ が収束することが示せた.
　(2) $\Rightarrow$ (1) を示すには，同じ不等式を用いて

$$\begin{aligned}
\sum_n b_n &= \sum_n \sqrt{b_n}^2 \\
&= \sum_n (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} + \sqrt{a_n})^2 \\
&\leq \sum_n 2\{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2 + \sqrt{a_n}^2\} \\
&= 2\sum_n (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2 + 2\sum_n a_n \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

これから $\sum_n (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2$ が収束するならば $\sum_n b_n$ が収束することが示せる.

$\boxed{3}$ G を位数 8 の二面体群 $\langle x, y \,|\, x^4 = y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle$ とするとき, G から位数 4 の巡回群 $\langle z \,|\, z^4 = 1 \rangle$ への全射準同型は存在しないことを示せ.

[**解答**] $\boxed{3}$
φ を G から位数 4 の巡回群への準同型とする. G は xy, y で生成されるので φ の像 $\varphi(G)$ は $\varphi(xy)$, $\varphi(y)$ で生成される. ところが xy, y は位数 2 なので $\varphi(xy), \varphi(y) \in \{1, z^2\}$ である. よって φ は全射でない.

[**別解**] $\boxed{3}$
φ を G から位数 4 の巡回群への全射準同型とすると, φ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は G の位数 2 の正規部分群である. G の位数 2 の元は x^2, y, xy, x^2y, x^3y の 5 つあるが, $xyx^{-1} = x^2y$, $x \cdot xyx^{-1} = x^3y$ なので $\{1, y\}$, $\{1, xy\}$, $\{1, x^2y\}$, $\{1, x^3y\}$ は正規部分群ではない. したがって $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{1, x^2\}$ でなくてはならないが, $G/\{1, x^2\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ であるから, 矛盾を生じる. したがって G から位数 4 の巡回群への全射準同型は存在しない.

$\boxed{4}$ $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を

$$f(x,y,z) = (x+y+z, xy+yz+zx, xyz)$$

で定義する．このとき S^2 の各点 p における f の微分 $df_p : T_pS^2 \to T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ のランクを求めよ．

[**解答**] $\boxed{4}$
$p=(x,y,z) \in S^2$ に対し $T_pS^2 \subset T_p\mathbb{R}^3$ は $T_p\mathbb{R}^3$ を自然に $\mathbb{R}^3$ と同一視すると $T_pS^2 = \{{}^t(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid xv_1+yv_2+zv_3=0\}$ と表される．したがって

$$f_1(p)=x+y+z,\ f_2(p)=xy+yz+zx,\ f_3(p)=xyz$$

とおくと $\mathrm{Ker}(df_p : T_pS^2 \to T_{f(p)}\mathbb{R}^3)$ は行列

$$A = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2 \\ \partial_x f_3 & \partial_y f_3 & \partial_z f_3 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

の表す線形写像 $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ に関する $\mathrm{Ker}\,A$ に等しい．ここで $\mathrm{rank}\,A$ は x, y, z がすべて等しいとき 1, ちょうど 2 つだけ等しいとき 2, それ以外は 3 である．従って

$$\mathrm{rank}\,df_p = 2 - \dim\mathrm{Ker}\,df_p = 2 - \dim\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{rank}\,A - 1$$

に注意すると結果は次のようになる．

$$\mathrm{rank}\,df_p = \begin{cases} 0 & x=y=z \text{ のとき} \\ 1 & x,\ y,\ z \text{ のうちちょうど } 2 \text{ つだけ等しいとき} \\ 2 & x,\ y,\ z \text{ のどの } 2 \text{ つも互いに異なるとき.} \end{cases}$$

[**別解**] $\boxed{4}$
$p=(x,y,z) \in S^2$ において x, y, z のうち少なくとも 1 つは 0 でない．$z \neq 0$ のとき，(x,y) は $p=(x,y,z)$ のまわりの S^2 の局所座標を与える．このとき z を (x,y) の関数 $z(x,y)$ とみなして $x^2+y^2+z^2=1$ の両辺を x, y で偏微分すれば

$$z_x = -\frac{x}{z}, \quad z_y = -\frac{y}{z}$$

となる，したがって $g(x,y)=f(x,y,z(x,y))$ とおくと

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz) = \frac{z-x}{z}\ (1,\ x+y+z,\ y(z+x)),$$

同様の計算により

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{z-y}{z}\ (1,\ x+y+z,\ x(z+y))$$

である．これより

$x = y = z$ ならば $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{o}$.
$x = y \neq z$ ならば $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} \neq \mathbf{o}$.
$y = z \neq x$ ならば $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{o}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x} \neq \mathbf{o}$.
$z = x \neq y$ ならば $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{o}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq \mathbf{o}$.
x, y, z のどの 2 つも互いに異なるときは $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ は 1 次独立.

$$\operatorname{rank} df_p = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

であるから, $z \neq 0$ のとき解答 1 と同じ結論が得られる. $x \neq 0$ または $y \neq 0$ のときも (y, z), (x, z) をそれぞれ局所座標にとれば式の対称性から全く同じ結論が得られる.

$\boxed{5}$ M を正数, f_0 を閉区間 $[0,1]$ 上の連続函数とする. $[0,1]$ 上の函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = M\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$$

で定義する. このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0,1]$ 上で一様収束することを示せ.

[**解答**] $\boxed{5}$
定義式より各 f_n は $[0,1]$ 上の連続関数である. f_0 は有界閉区間上の連続関数なので,

$$\max_{x\in[0,1]} |f_0| = K < +\infty$$

が成り立つ. このとき, 数学的帰納法で次の不等式を示す.

$$|f_n(x)| \leq \frac{KM^n}{n!}x^n,\ x\in[0,1]$$

まず $n=1$ のときは

$$|f_1(x)| \leq M\int_0^x |f_0(t)|dt \leq M\max_{[0,x]}|f_0|\int_0^x dt \leq kMx$$

次に $n=k$ のとき不等式が正しいと仮定する. このとき

$$|f_{k+1}(x)| \leq M\int_0^x |f_k(t)|dt \leq M\int_0^x KM^k t^k/k!dt$$
$$= KM^{k+1}x^{k+1}/(k+1)!$$

となるので $n=k+1$ のときも不等式は成立する.
次に f_n が $[0,1]$ 上で一様収束することを示す. そのためには

$$\max_{[0,1]}|f_n| \leq K\frac{M^n}{n!}$$

であるので、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!} = 0$$

を示せば十分であることが分かる. この極限値は収束級数

$$e^M = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M^n}{n!}$$

の一般項が $n\to\infty$ のとき 0 に収束しなければならないことより分かる.

$\boxed{6}$ f を領域 $S = \{x + \sqrt{-1}y \,|\, x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1\}$ で正則な函数とする．正の定数 A, k が存在して, すべての $z \in S$ に対して

$$|f(z)| \leq A(1 + |z|)^k$$

が成り立つとする．このとき, 各自然数 n について

$$|f^{(n)}(x)| \leq A_n(1 + |x|)^k$$

がすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つような正の定数 A_n が存在することを示せ.

[**解答**] $\boxed{6}$

x を任意の実数, C_x を複素平面内の中心 x 半径 1/2 の円周とする．このとき C_x およびその内部は S に含まれるので, コーシーの積分公式より

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_x} \frac{f(z)}{z - x} dz$$

がなりたつ．ここで, 微分と積分の順序が交換できることに注意して

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_x} f(z) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{z - x} dz \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_x} f(z)(z - x)^{-(n+1)} dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{C_x} |f(z)| 2^{(n+1)} |dz| \\ &\leq \frac{2^n n!}{\pi} \oint_{C_x} A(1 + |z|)^k |dz| \\ &= A \frac{2^{n-1} n!}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + |x + e^{i\theta}/2|)^k d\theta \end{aligned}$$

$\zeta = e^{i\theta}/2$ とすれば

$$\begin{aligned} (1 + |x + \zeta|)^k &\leq (1 + |x| + |\zeta|)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} (1 + |x|)^j |\zeta|^{k-j} \\ &\leq B_k (1 + |x|)^k \end{aligned}$$

ただし $B_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{2^{k-j} j!(k-j)!}$. 従って,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &\leq A \frac{2^{n-1} n!}{\pi} B_k (1 + |x|)^k \int_0^{2\pi} d\theta \\ &\leq A_n (1 + |x|)^k, \quad A_n = 2^n n! A B_k \end{aligned}$$

が成り立つ.