数学基礎実習筆記試験問題（ 2007 年度第 2 回）

$\boxed{1}$ $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を n 次の実正方行列全体のなす実ベクトル空間とする．$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ の部分集合 V を

$$V = \{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AB = O\}$$

で定義する．ここで O は零行列である．このとき, 次の問いに答えよ．

(1) V は $\mathrm{M}_n(\mathrm{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) $\mathrm{dim}V$ を $r = \mathrm{rank}A$ を用いて表わせ．

$\boxed{2}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ をみたす正数列とする．このとき, 正数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関する次の条件 (1), (2) は同値であることを示せ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$ は収束する．

$\boxed{3}$ G を位数 8 の二面体群 $\langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1, yxy = x^{-1}\rangle$ とするとき, G から位数 4 の巡回群 $\langle z \mid z^4 = 1\rangle$ への全射準同型は存在しないことを示せ．

$\boxed{4}$ $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を

$$f(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$$

で定義する．このとき S^2 の各点 p における f の微分 $df_p : T_pS^2 \to T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ のランクを求めよ．

$\boxed{5}$ M を正数, f_0 を閉区間 $[0, 1]$ 上の連続函数とする．$[0, 1]$ 上の函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = M \int_0^x f_{n-1}(t)\, dt$$

で定義する．このとき $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0, 1]$ 上で一様収束することを示せ．

$\boxed{6}$ f を領域 $S = \{x + \sqrt{-1}y \mid x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1\}$ で正則な函数とする．正の定数 A, k が存在して, すべての $x \in S$ に対して

$$|f(z)| \leq A(1 + |z|)^k$$

が成り立つとする．このとき, 各自然数 n について

$$|f^{(n)}(x)| \leq A_n(1 + |x|)^k$$

がすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つような正の定数 A_n が存在することを示せ．