数学基礎実習筆記試験問題解答 (2007 年度 第 1 回)

1 A は複素数を成分とする n 次正方行列，$f_A(x)$ を A の最小多項式とする．このとき A が正則行列であるための必要十分条件は $f_A(0) \neq 0$ であることを示せ．

[**解答**] 1
$f_A(x) = g(x)x + c$ と書いておく．ただし $g(x)$ は最高次係数が 1 の多項式，$c \in \mathbb{C}$ である．E_n を単位行列，O_n を零行列とすれば，最小多項式の定義より $f_A(A) = g(A)A + cE_n = O_n$ であるが，ここで $c \neq 0$ ならば $(-c^{-1}g(A))A = E_n$ である．したがって A は正則行列で $A^{-1} = -c^{-1}g(A)$ であることがわかる．もし $c = 0$ ならば $g(A)A = O_n$ であるが，A が正則行列ならば $g(A) = O_n$ が結論され，$f_A(x)$ の次数の最小性に矛盾する ($f_A(x)$ が一次式の時は $g(x)$ は定数であるが，このとき $g(x) = 0$ したがって $f(x) = 0$ となり，これも最小多項式の選び方に矛盾する)．したがって A は正則でない．以上より $f_A(0) = c \neq 0$ であることと A が正則であることは同値である．

[**講評**] 最小多項式は零でない多項式 $f(x)$ であって，$f(A) = O_n$ を満たし，次数が最小，かつ最高次の係数が 1 のものをいう．一般に**固有多項式** $p_A(x) = \det(xE_n - A)$ **と最小多項式は異なる**ことに注意せよ．答案では両者を混同しているものが散見された．$f_A(x) \mid p_A(x)$ なので $1 \leq \deg f_A(x) \leq n$ が成り立つ．また $f_A(0)$ は一般に $\pm \det A$ と一致しない．

A の相異なる固有値を $\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ として固有値 α_i の Jordan 細胞の最大のサイズを k_i とすれば，$f_A(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i)^{k_i}$，$f_A(0) = (-\alpha_1)^{k_1} \dots (-\alpha_m)^{k_m}$ が成り立つ．この事実より $f_A(0) \neq 0 \iff \forall \alpha_i \neq 0 \iff$ (A が正則) が従う (別解)． □

$\boxed{\mathbf{2}}$ 整数 $n \geq 2$ に対して $a_n = n^{1/n} - 1,\ b_n = \dfrac{\log n}{n}$ と定める．このとき極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

を求めよ．

[解答] $\boxed{2}$
まず $b_n \to 0$ を注意しておく．また $e^{b_n} = \exp\{\log n^{1/n}\} = n^{1/n}$ であるから $a_n = e^{b_n} - 1$ である．従って

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{b_n} - 1}{b_n} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (x \text{ は実数の範囲を動く}) \\ &= 1 \quad (\because (e^x)' = e^x)\end{aligned}$$

となる．

[講評] 問題にあるように n は整数である．l'Hôpital の定理を使うために a_n の導関数を計算している解答が見受けられたが，その場合は n を実数の範囲に拡張した関数を考えるていることを明確に断るべきである．答案は人が見るものだから，説明をきちんとするように心がけて欲しい．

□

$\boxed{\mathbf{3}}$ $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ の部分群で位数 4 のものはいくつあるか.

[解答] $\boxed{3}$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元を $\bar{0}$, $\bar{1}$ で表わす. 同様に $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の元を $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ で表わす. 位数 4 の Abel 群は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ または巡回群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ に同型である. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ の位数 2 の元は $(\bar{1}, \bar{0})$, $(\bar{0}, \bar{2})$, $(\bar{1}, \bar{2})$ の 3 つだけだから $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ と同型な部分群は $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2})\}$ しかない. 一方, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ の位数 4 の元は $(\bar{0}, \bar{1})$, $(\bar{1}, \bar{1})$, $(\bar{0}, \bar{3})$, $(\bar{1}, \bar{3})$ の 4 つである. これらから生成される位数 4 の巡回群は $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})\}$ と $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3})\}$ の 2 つある. したがって $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ の位数 4 の 部分群は全部で 3 つある. $\square$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\mathbb{R}^3$ の部分集合 M を
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx = 1\}$$
で定める．

(1) M は $\mathbb{R}^3$ の部分多様体であることを示せ．

(2) 写像 $g : M \to \mathbb{R}^2$ を
$$g(x,y,z) = (x+y+z, xyz)$$
で定めるとき，M の各点 p における g の微分 $dg_p : T_pM \to T_{g(p)}\mathbb{R}^2$ のランクを求めよ．

[解答] $\boxed{4}$

(1) $f_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$ とおくと $\mathbb{R}^3$ の点 $p=(x,y,z)$ において
$$(df_1)_p := ((f_1)_x, (f_1)_y, (f_1)_z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z)$$
が $\mathbf{o}$ となるのは $x=y=z=0$ に限るから $f_1(x,y,z)=1$ ならば df_1 は $\mathbf{o}$ になりえず，1 は f_1 の正則値である．したがって（陰関数定理により）$M = f_1^{-1}(1)$ は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分多様体である．

（注）適当な変数変換によりある $\mathbb{R}^3$ の微分同相写像で M が $\mathbb{R}^3$ の単位球面に写ることを用いて示すこともできる．

(2) 点 $p \in M$ における M の接空間 T_pM は $T_p\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\ker(df_1)_p$ に等しい．また $f_2(x,y,z) = x+y+z$, $f_3(x,y,z) = xyz$ とおくと，$p=(x,y,z)$ において $dg_p : T_pM \to T_{g(p)}\mathbb{R}^2$ はヤコビ行列
$$\begin{pmatrix} (df_2)_p \\ (df_3)_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$$
で表される線型写像 $T_p\mathbb{R}^3 \to T_{g(g)}\mathbb{R}^2$ の定義域を T_pM に制限したものである．したがって $\ker dg_p$ は行列
$$\begin{pmatrix} (df_1)_p \\ (df_2)_p \\ (df_3)_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z & x+2y+z & x+y+2z \\ 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$$
を A とおくと $\ker A$ に等しく，
$$\operatorname{rank} dg_p = 2 - \dim\ker A = \operatorname{rank} A - 1$$
となる．一方 $\operatorname{rank} A$ は例えば基本変形で A が
$$\begin{pmatrix} 0 & y-x & z-x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & z(x-y) & y(x-z) \end{pmatrix}$$
にうつることから計算され，結局 $p=(x,y,z)$ に対して $\operatorname{rank} dg_p$ は次のようになる．
$$\operatorname{rank} dg_p = \begin{cases} 0 & x=y=z(=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}) \text{ のとき，} \\ 1 & x=y\neq z \text{ または } x\neq y=z \text{ または } z=x\neq y \text{ のとき，} \\ 2 & \text{それ以外．} \end{cases}$$

□

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1) 級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \quad (x \in \mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,f(x)$ を求めよ．

[解答] $\boxed{5}$

(1) $f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} 1/(x^2+n^2)$ を第 k 部分和とする．また $\|F\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x)|$ で sup-ノルムを表す．このとき題意の級数が一様収束するとは，$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ が sup-ノルムに関して $f(x)$ に収束することであり，それは $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ が sup-ノルムに関して Cauchy 列をなすことと同値である．ところが $m > k$ とすると

$$\|f_k - f_m\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big\{ \sum_{n=k+1}^{m} \frac{1}{x^2+n^2} \Big\} \le \sum_{n=k+1}^{m} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+n^2} = \sum_{n=k+1}^{m} 1/n^2 \to 0 \qquad (k, m \to \infty)$$

であるから，確かに $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は Cauchy 列をなす．ただし $\sum_{n=k+1}^{m} 1/n^2 \to 0$ の部分には $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ が収束することを用いた．実際 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < 1 + \int_1^{\infty} 1/x^2 dx = 2$ である．

(2) $g(t) = 1/(x^2+t^2)$ とおくと $x > 0$ において

$$x \int_1^{\infty} g(t)dt < x f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} g(n) < x \int_0^{\infty} g(t)dt \qquad (*)$$

が成り立つ．ここで $x > 0$ なら

$$\int_a^{\infty} g(t)dt = \int_a^{\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} = \frac{1}{x} \int_{t=a}^{t=\infty} \frac{d(t/x)}{1+(t/x)^2} = \frac{1}{x} \int_{a/x}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{x}(\pi/2 - \tan^{-1}(a/x))$$

であるから，(**??**) 式の左辺は

$$x \int_1^{\infty} g(t)dt = \pi/2 - \tan^{-1}(1/x) \to \pi/2 \qquad (x \to \infty)$$

である．同様に右辺は

$$x \int_0^{\infty} g(t)dt = \pi/2$$

であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x f(x) = \pi/2$ であることがわかる．

[講評] (1) では優級数定理による一様収束の判定も使えるが，それは結局のところ解答にある証明と同じものになる．優級数定理: $|f_n(x)| \le g_n(x)$ であって，$\sum_n g_n(x)$ が x について区間 I 上で一様収束していれば，$\sum_n f_n(x)$ もまた I 上で一様収束する．

(2) の答案では不等式による上からの評価だけしか書けていないものが複数あった．また $x/(x^2+n^2) = (1/x) \times 1/(1+(n/x)^2)$ とみなして $1/(1+t^2)$ の Riemann 積分に帰着することもできるが，積分区間が非有界なので注意が必要である．答案では積分に帰着する部分を明快に書き切れたものは無かった． □

$\boxed{\mathbf{6}}$ 領域 $D \subset \mathbb{C}$ において正則かつ実数値のみを取る函数は定数函数であることを示せ．

[**解答**] $\boxed{6}$
$f(z)$ は正則関数であるので $z_0 \in D$ に対して

$$f'(z_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{iy}$$

が成り立つ．ここで x, y は実数とする．$f(z)$ は実数値しか取らないので

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x}$$

は実数である．一方

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{iy}$$

は純虚数である．両者が等しいので 0 でなければならない．したがって D で $f'(z) = 0$ である．よって $f(z)$ は**局所**定数函数．D は連結であるので $f(z)$ は定数である．

[**別解**] $\boxed{6}$
正則関数 $f(z)$ を領域 D から複素平面への写像と見ると，$f(z)$ が定数函数でなければ開写像である．今，$f(z)$ は実数値しか取らないので $f(D) \subset \mathbb{R}$ となり $f(D)$ は複素平面の開集合ではない．従って $f(z)$ は定数函数である．

定数でない正則関数 $f(z)$ が開写像であることの証明: $f(z)$ は定数函数でないとする．$f'(z_0) \neq 0$ であればコーシー・リーマンの関係式よりヤコビアンが正となるので z_0 の近傍で局所同相写像である．もし $f'(z_0) = 0$ であれば $f(z_0) = a$ と置くと $f(z) - a$ は z_0 で $m \geq 2$ 位の零点を持つ．$f(z) - a = (z - z_0)^m g(z)$，$g(z_0) \neq 0$ と z_0 の近傍で書ける．このとき $g(z)^{1/m}$ は z_0 の近傍で正則関数であり，$h(z) = (z - z_0)g(z)$ は $h'(z_0) \neq 0$ であるので $w = h(z)$ は z_0 の近傍で局所同相である．また $a + w^m$ が開写像であることは複素数の極座標表示から分かる．$f(z)$ は z_0 の近傍で写像 $z \mapsto h(z) = w$, $w \mapsto a + w^m$ の合成として書けるので開写像である． $\square$