

数学基礎実習筆記試験問題 (2007年度 第1回)

1  $A$  は複素数を成分とする  $n$  次正方行列,  $f_A(x)$  を  $A$  の最小多項式とする. このとき  $A$  が正則行列であるための必要十分条件は  $f_A(0) \neq 0$  であることを示せ.

2 整数  $n \geq 2$  に対して  $a_n = n^{1/n} - 1$ ,  $b_n = \frac{\log n}{n}$  と定める. このとき極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

を求めよ.

3  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  の部分群で位数 4 のものはいくつあるか.

4  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $M$  を

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1\}$$

で定める.

(1)  $M$  は  $\mathbb{R}^3$  の部分多様体であることを示せ.

(2) 写像  $g: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$g(x, y, z) = (x + y + z, xyz)$$

で定めるとき,  $M$  の各点  $p$  における  $g$  の微分  $dg_p: T_p M \rightarrow T_{g(p)} \mathbb{R}^2$  のランクを求めよ.

5

(1) 級数  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) は  $\mathbb{R}$  上一様収束することを示せ.

(2) 極限值  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$  を求めよ.

6 領域  $D \subset \mathbb{C}$  において正則かつ実数値のみを取る関数は定数関数であることを示せ.