数学基礎実習 (2007 年 1 月 17 日実施) 解答

$\boxed{1}$ (i) 行列の掛け算の定義にしたがって計算すればよいので略．

(ii) (i) より A の最小多項式は $x^2 - nx$ を割る．もし，最小多項式が一次式だとすると矛盾する．実際，$x - a$ が最小多項式とすると，$A = aE$ となるが A はすべての成分が 1 なので矛盾．よって，最小多項式は $x^2 - nx$.

(iii) 計算すると $A\mathbf{x} = n\mathbf{x}$ および $A\mathbf{y} = 0\mathbf{y}$ が成り立つことがわかるので，$\mathbf{x}$ は固有値 n の固有ベクトル，また $\mathbf{y}$ は固有値 0 の固有ベクトル．

(iv) 最小多項式が重解をもたないので A は対角化可能．具体的には次のように行う．n 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を次のように定める．まず $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}$ とおく．また $i = 3, 4, \ldots, n$ に対しては $\mathbf{v}_i = {}^t(1, 0, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$（ここで -1 は i 番目）で定める．すると，$A\mathbf{v}_1 = n\mathbf{v}_1$ および $A\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_i$ ($i = 2, 3, \ldots, n$) が成り立つ．したがって，$P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ とおくと $AP = PB$. ここで B は対角成分が $n, 0, 0, \ldots, 0$ の対角行列．また，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ は一次独立なので P は逆行列をもつ．よって，$P^{-1}AP = B$ と対角化される．

$\boxed{2}$ (解答その 1) 任意の実数 $y \in \mathbb{R}$ について $|\sin y| \leq |y|$ が成り立つから,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|\sin \frac{x}{k}\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|}{k}.$$

よって, $x \in [-1, 1]$ なる任意の実数 x について

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{1}$$

ところで, 閉区間 $[k-1, k]$ $(k \geq 2)$ 上で函数 $\dfrac{1}{y}$ は連続であり, 開区間 $(k-1, k)$ 上で $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{y}$ だから $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dy}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dy}{y}$. よって,

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dy}{y}\right) = \frac{1}{n}\left(1 + \int_{1}^{n} \frac{dy}{y}\right) = \frac{1}{n}(1 + \log n). \tag{2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \log n) = 0$ だから函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は閉区間 $[-1, 1]$ 上函数 0 に一様収束する.

(解答その 2) 任意の実数 $y \in \mathbb{R}$ について $|\sin y| \leq |y|$ が成り立つから, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して $N_1 > \dfrac{2}{\varepsilon}$ なる正整数 N_1 をとれば, $k > N_1$ なる任意の正整数 k について $x \in [-1, 1]$ ならば

$$\left|\sin \frac{x}{k}\right| \leq \left|\frac{x}{k}\right| \leq \frac{1}{k} < \frac{1}{N_1} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

このような N_1 を 1 つ固定する. また, 任意の実数 $y \in \mathbb{R}$ について $|\sin y| \leq 1$ だから, 任意の正整数 k についてすべての実数 x に対して

$$\left|\sin \frac{x}{k}\right| \leq 1. \tag{4}$$

よって, $N_2 > \dfrac{2N_1}{\varepsilon}$ なる正整数 N_2 をとり $N = \max\{N_1, N_2\}$ としたとき, $n > N$ ならば $x \in [-1, 1]$ なる任意の実数について

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\sin \frac{x}{k}\right| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}\left|\sin \frac{x}{k}\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\left|\sin \frac{x}{k}\right| \\ &\leq \frac{N_1}{n} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により, 函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は閉区間 $[-1, 1]$ 上函数 0 に一様収束する.

(解説) 一様収束を証明するには, 考えている閉区間 $[-1, 1]$ 内の点のとり方によらずに成り立つ不等式を探し出すことが大切である. 解答その 1 の場合 (1) の不等式が任意の $x \in [-1, 1]$ に対して成り立つことが重要である. さらに, (2) の不等式は 2 つ目の辺以降は x と無関係であることによりやはり $x \in [-1, 1]$ のとり方によらない. 従って, 函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に一様収束することを示すには, 最後の辺に現れる数列が 0 に収束することを示せばよい. この問題の場合は数列の各項の因子として現れる級数 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$ が積分 $\displaystyle\int_1^n \frac{dy}{y} = \log n$ を用いて評価され, 数列が 0 に収束することが分かる. この証明は, 数列 $\displaystyle\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が単調非減少な非負数列であることによるが, このことは数列 $\displaystyle\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することの本質ではない. 本質は数列 $\displaystyle\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束すること, 函数列で言うと $\displaystyle\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が閉区間 $[-1, 1]$ 上で一様収束することである.

函数列 $\displaystyle\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が閉区間 $[-1, 1]$ 上で 0 に一様収束することに注目して積分を用いずに証明したのが解答その 2 である. まず, 一様収束を $\varepsilon - \delta$ 論法で証明するときの基本事項を確認する. 一様収束を証明するには, 考えている閉区間 $[-1, 1]$ 内の点のとり方によらない正整数 N を探し出す必要がある. N を決めるのに N_1, N_2 を決めているが, (3) より N_1 の決め方が $[-1, 1]$ 内の点のとり方によらないことに注意する. また, (4) の不等式が任意の実数 x に対して成り立つことも, 最後の不等式が $[-1, 1]$ 内の点のとり方によらないことに使われている.

この問題は一様ノルムを導入すると分かりやすい. $C([-1,1])$ を閉区間 $[-1,1]$ 上の連続函数全体からなるベクトル空間とする. $[-1,1]$ はコンパクトだから, 任意の $f \in C([-1,1])$ について $\{|f(x)|\,;\, x \in [-1,1]\}$ は最大値をもつ. そこで, $\|f\| := \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ とする. この $\|f\|$ を f の一様ノルムという. $\|f\|$ は以下の性質をもつ.

(i) $0 \leq \|f\| < \infty$ であり, $\|f\| = 0 \iff f = 0$,

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$,

(iii) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (三角不等式).

このような性質をもつ $\|f\|$ を一般に f のノルムと呼ぶ. 函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が函数 f に一様収束することは, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様ノルムの意味で f に収束することに他ならない. $g_k(x) = \sin \dfrac{x}{k}$ とおくと, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ であり, (3) は $k > N_1$ なる任意の正整数 k について $\|g_k\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, (4) は任意の正整数 k について $\|g_k\| \leq 1$ であることを示している. 言い換えると, (3) は函数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が函数 0 に一様収束していること, (4) は $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様ノルムに関する閉単位球 $\{f \in C([-1,1])\,;\, \|f\| \leq 1\}$ に含まれている, 特に, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示している. つまり, この問題の本質は函数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が函数 0 に一様収束するとき, 函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ も 0 に一様収束することを示すことである. なお, この問題の場合 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることは函数 $g_n(x)$ の形から明らかであるが, ノルム空間の収束点列は常に有界であることに注意する.

一般に, ノルム空間の点列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して初項から第 n 項までの平均のなす数列 $f_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が収束するときその極限を Cesàro 総和と呼ぶ. Cesàro 総和に関して次のことが示される.

<u>命題</u>. V をノルム $\|\cdot\|$ をもつノルム空間, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を V の点列とする. もし, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が V の元 g に収束すれば, Cesàro 総和が存在し g と一致する. つまり,

$$\|g_n - g\| \to 0 \ (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g_k - g \right\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

証明は問題の解答その 2 と同様にできる. 確認のために改めて証明をする. $h_n = g_n - g$ とすると点列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する. 即ち, 任意の正実数

$\varepsilon > 0$ に対してある正整数 N_1 が存在して, $k > N_1$ なる任意の正整数 k について

$$\|h_k\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ここで, $M = \max\left\{\|h_1\|, \ldots, \|h_{N_1}\|, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ とおくと, 任意の正整数 k について

$$\|h_k\| \leq M.$$

N_2 を $N_2 > \dfrac{2MN_1}{\varepsilon}$ なる正整数, $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると, $n > N$ なる任意の正整数 n について

$$\begin{aligned}\|f_n - g\| &= \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g_k - g\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|g_k - g\| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}\|h_k\| \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}\|h_k\| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\|h_k\| < \frac{MN_1}{n} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により, 点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は g に収束する.

この命題の逆は成り立たない. 即ち, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないが, Cesàro 総和が存在することがあることに注意する. このことは点列が実数列の場合でも起こり得る. 例えば, 実数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $g_{2m-1} = \sqrt{m}$, $g_{2m} = -\sqrt{m}$ (m は正整数) とすると, 初項から第 n 項まで平均 $f_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_n$ は

$$f_{2m-1} = \frac{\sqrt{m}}{2m-1}, \quad f_{2m} = 0.$$

よって, 数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束するが, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないどころか有界にすらならないのである. 命題の主張を正確に理解し, 安易に逆を考えて誤ることのないよう普段から気を付けてほしい.

3. (解答その 1) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ を満たす点全体のなす集合は単位球面 S であり, S はコンパクトで $f(x, y, z)$ は連続であるから, $f(x, y, z)$ は S で必ず最大値, 最小値をもつ. S において g の偏導函数を考えると,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって, 実数値函数 $f(x,y,z)$ が点 (x,y,z) で最大あるいは最小になるとき, ある実数 $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在して次の式が成り立つ（Lagrange の未定乗数法)：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x} &= y-z-2\lambda x = 0, \qquad (5)\\
\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y} &= x-z-2\lambda y = 0, \qquad (6)\\
\frac{\partial f}{\partial z}-\lambda\frac{\partial g}{\partial z} &= -x-y-2\lambda z = 0. \qquad (7)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}((5)+(6)-(7))$ を計算すると

$$(1-\lambda)(x+y-z)=0. \tag{8}$$

(I) $1-\lambda=0$ のとき：(5)〜(7) に代入し, 連立一次方程式として解くと $x=y=-z$. これを $g(x,y,z)=0$ に代入すると $(x,y,z)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ を得る. このとき

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}}-\frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=1.$$

(II) $x+y-z=0$ のとき：$g(x,y,z)=0$ に代入すると, $x^2+y^2+(x+y)^2-1=2(x^2+xy+y^2)-1=0$. よって $x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}$. このとき,

$$f(x,y,z)=xy-y(x+y)-(x+y)x=-(x^2+xy+y^2)=-\frac{1}{2}.$$

ここで例えば $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ は $x+y-z=0$, $g(x,y,z)=0$ をともに満たす点であるので，$f(x,y,z)$ は確かに $-\frac{1}{2}$ を値にとり得る.

(5)〜(7) および $g(x,y,z)=0$ を満たす点 (x,y,z) における $f(x,y,z)$ のとり得る値は $1,-\frac{1}{2}$ の 2 個しかない. これらの中に S における $f(x,y,z)$ の最大値および最小値が存在しなければならない. 以上により, $f(x,y,z)$ の最大値は 1, 最小値は $-\frac{1}{2}$ である.

(解答その 2)　3 次正方行列 A, U を

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

とおくと, $f(x,y,z) = (x,y,z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，すなわち対称行列 A は 2 次形式 f の係数行列である．一方，U は 3 次直交行列で

$$ {}^tUAU = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

のように A を対角化する．そこで $(u,v,w) = (x,y,z)U$ と変数変換して, $S' = \{(u,v,w) \mid (x,y,z) \in S\}$ とおくと S' もまた単位球面で, 問題は S' の上で

$$\begin{aligned} h(u,v,w) = f(x,y,z) = (x,y,z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (x,y,z)U\,{}^tUAU\,{}^tU\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (u,v,w)B\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(2u^2 - v^2 - w^2). \end{aligned}$$

の最大・最小を考えることに帰着するが，h の取りうる値の範囲は次のように容易に評価できる：

$$-\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}(v^2 + w^2) \le h(u,v,w) \le u^2 \le 1.$$

更に，$(1,0,0), (0,0,1)$ はともに単位球面 S' の点であり，$h(1,0,0) = 1, h(0,0,1) = -\frac{1}{2}$ となるから $h(u,v,w)$, 即ち $f(x,y,z)$ の最大値は 1, 最小値は $-\frac{1}{2}$ である.

(注意)　Lagrange の未定乗数法により求まる点は一般には函数 f の特異点 (極値を取る点の必要条件) でしかないので，実際にそこで最大値と最小値を実現することは別に確認が必要であることに注意．また，S^2 の局所座標系を与えて座標近傍ごとに条件なしの最大・最小問題として扱った解答もいくつかあったが，計算が非常に煩雑になるので良い解法とは言えないだろう. (実際，議論を最後まで完成できていなかった.)

$\boxed{4}$ 写像

$$\varphi : G \longrightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$$

を

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = (a, c)$$

により定める．このとき,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in G$$

に対して,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}\right) \\
&= (ad, cf) \\
&= (a, c)(d, f) \\
&= \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つので φ は準同形写像である．また, G の定義から φ は全射である．

次に,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = (1, 1)$$

となる為の必要十分条件は

$$a = c = 1$$

なので,

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\}$$

である．

$\boxed{5}$ $O(3)$ が連結ではないことを示す．まず，$M(3, \mathbb{R})$ で 3 次行列全体のなす集合をあらわし，連続写像 $f : M(3, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $f(A) = |A|$ で定める．ただし，$|A|$ は A の行列式．このとき，$O(3)$ の像は $\{-1, 1\}$. 実際，$A^tA = E$ より $|A|^2 = 1$. したがって，$|A| = 1$ または -1 であるが，$A = E$ のとき $|A| = 1$, また，A として対角成分が $-1, 1, 1$ の対角行列をとると $|A| = -1$ なので，f は全射である．さて，$O(3)$ が連結とすると $\{-1, 1\}$ は連結でないので矛盾する（連続写像により連結集合は連結集合にうつされるので）．

つぎに $O(3)$ がコンパクトであることを示す．$O(3)$ が $M(3, \mathbb{R})$ の中で有界な閉集合であることを示せば良い．ただし，$M(3, \mathbb{R})$ には次で距離を定めておく．$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ (ただし，$\mathbf{v}_i$ は i 番目の列) に対し $||A|| = \sqrt{|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + |\mathbf{v}_3|^2}$ で定める．すると，$O(3)$ が有界なことは $||A|| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ であるこ

とから従う．次に，$\lim_{n\to\infty} A_n = A$ とする．ここで $\{A_n\}$ は行列の列で，$A_n \in O(3)$．このとき，${}^tA_nA_n = E$ において $n \to \infty$ とすると，${}^tAA = E$．したがって極限 A は $O(3)$ に属する．よって，$O(3)$ は閉集合．以上より $O(3)$ はコンパクト．

$\boxed{6}$ 不定積分を計算する方法と, 留数計算による方法がある.

不定積分

$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ を部分積分することにより,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2(x^2+1)-2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\end{aligned}$$

が得られる. よって

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{x}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + C\end{aligned}$$

なので,

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

である.

留数計算

積分

$$\int_I \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

を考える. 但し, 積分経路 I $(r>1)$ は次で与えられるものとし, 向きは反時計回りとする.

$$\begin{aligned}I &= I_1 \cup I_2 \\ I_1 &= [-r, r] \\ I_2 &= \{re^{\sqrt{-1}\theta} \mid 0 \leqq \theta \leqq \pi\}.\end{aligned}$$

いま $\dfrac{1}{(x+\sqrt{-1})^2}$ を $x=\sqrt{-1}$ でベキ級数展開すると,

$$\frac{1}{(x+\sqrt{-1})^2} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{-1}}{4}(x-\sqrt{-1}) + \cdots$$

なので, $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ の $x=\sqrt{-1}$ でのベキ級数展開は

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x-\sqrt{-1})^2} - \frac{\sqrt{-1}}{4}\frac{1}{(x-\sqrt{-1})} + \cdots$$

となる. よって

$$\int_I \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

であることがいえる. ここで, $r \to \infty$ とすると,

$$\int_{I_2} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \longrightarrow 0$$
$$\int_{I_1} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

である. よって

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

がいえる.