

数学基礎実習筆記試験問題 (2006 年度第 2 回)

(1) すべての成分が 1 である \mathbb{C} 上の n 次正方行列を A とする .

(i) $A^2 = nA$ を示せ .

(ii) A の最小多項式を求めよ .

(iii) \mathbb{C}^n の元 $x = {}^t(1, 1, \dots, 1), y = {}^t(1, -1, 0, \dots, 0)$ は A の固有ベクトルであることを示せ .

(iv) A は対角化可能か . 可能なときは , $P^{-1}AP$ が対角行列となるような n 次正則行列 P を求めよ .

(2) 自然数 n に対して函数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{x}{k}$$

で定める . このとき函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は閉区間 $[-1, 1]$ 上で定数函数 0 に一様収束することを示せ .

(3) \mathbb{R}^3 内の単位球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ において , 函数 $f(x, y, z) = xy - yz - zx$ の最大値と最小値を求めよ .

(4) 群 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \mid a, c \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\}$$

で定める . G から群 $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ への全射準同型を構成し , その核を求めよ .

(5) 3 次直交群

$$O(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = E_3\}$$

は連結かどうか答えよ . また $O(3)$ はコンパクトであることを示せ . ただし , $M_3(\mathbb{R})$ には通常位相を考えるものとする .

(6) 次の積分を計算せよ .

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$