数学基礎実習 (2006 年 7 月 19 日実施) 解答

以下に解答を付すが，解答は単に自分が理解しているだけでなく，他人にわかる形に書く必要がある．そのためには

- 論理的なつながりを明確にする
- 計算を羅列するのではなく，説明を文章としてきちんと書く
- 文字を丁寧に書く

ことを心がけるようにすること．以下の例を参考にして試験の解答の書き方にも以後留意するようにすること．

$\boxed{1}$

(i)

$\underline{H_0.}$

$0 \in H_0$ なので $H_0 \neq \emptyset$.

$A, A' \in H_0$ ならば,

$$^t(\overline{A + A'}) = {}^t(\overline{A} + \overline{A'}) = {}^t\overline{A} + {}^t\overline{A}' = A + A'$$

なので, $A + A' \in H_0$. また, $a \in \mathbb{R}$, $A \in H_0$ ならば,

$$^t(\overline{aA}) = {}^t(\overline{a}\overline{A}) = {}^t(a\overline{A}) = a\,{}^t\overline{A} = aA$$

なので, $aA \in H_0$. 以上により, H_0 が $M_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{R}$ 上の部分ベクトル空間であることがいえた.

$\underline{H_1.}$

$0 \in H_1$ なので $H_1 \neq \emptyset$.

$A, A' \in H_1$ ならば,

$$^t(\overline{A + A'}) = {}^t(\overline{A} + \overline{A'}) = {}^t\overline{A} + {}^t\overline{A}' = -A - A' = -(A + A')$$

なので, $A + A' \in H_1$. また, $a \in \mathbb{R}$, $A \in H_1$ ならば,

$$^t(\overline{aA}) = {}^t(\overline{a}\overline{A}) = {}^t(a\overline{A}) = a\,{}^t\overline{A} = -aA$$

なので, $aA \in H_1$. 以上により, H_1 が $M_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{R}$ 上の部分ベクトル空間であることがいえた.

(ii)

$A \in H_0$ ならば,

$$ {}^t(\overline{\sqrt{-1}A}) = {}^t(\overline{\sqrt{-1}}\,\overline{A}) = {}^t(-\sqrt{-1}\,\overline{A}) = -\sqrt{-1}\,{}^t\overline{A} = -\sqrt{-1}A $$

なので, $\sqrt{-1}A \in H_1$ である.

(iii)

(ii) により, H_0 から H_1 への写像 f を $f(A) = \sqrt{-1}A$ により定めることができる. H_0 の任意の元 A, A' に対して,

$$ f(A + A') = \sqrt{-1}(A + A') = \sqrt{-1}A + \sqrt{-1}A' = f(A) + f(A') $$

が成り立ち, また, H_0 の任意の元 A と任意の実数 a に対して,

$$ f(aA) = \sqrt{-1}aA = a\sqrt{-1}A = af(A) $$

が成り立つので, f は $\mathbb{R}$ 上の線型写像である. 一方, $B \in H_1$ とすると,

$$ {}^t(\overline{-\sqrt{-1}B}) = {}^t(\sqrt{-1}\,\overline{B}) = \sqrt{-1}\,{}^t\overline{B} = -\sqrt{-1}B $$

なので, $-\sqrt{-1}B \in H_0$ である. よって, H_1 から H_0 への写像 g を $g(B) = -\sqrt{-1}B$ により定めることができる. いま,

$$ \begin{aligned} f \circ g(B) &= f(g(B)) = B, \quad B \in H_1, \\ g \circ f(A) &= g(f(A)) = A, \quad A \in H_0, \end{aligned} $$

なので, f は全単射であり, f が $\mathbb{R}$ 上の線型写像であることとあわせて, f は $\mathbb{R}$ 上の同型写像であることがいえる. よって,

$$ \dim_{\mathbb{R}} H_0 = \dim_{\mathbb{R}} H_1 $$

である. 次に, $\dim_{\mathbb{R}} H_0$ を計算する. いま, A の (i, j) 成分を a_{ij} とすると, ${}^t\overline{A}$ の (i, j) 成分は $\overline{a_{ji}}$ なので, A が H_0 の元であるための必要十分条件は,

$$ \begin{cases} a_{ij} = \overline{a_{ji}}, & i \neq j, \\ a_{ii} = \overline{a_{ii}}, \end{cases} $$

である. よって, E_{ij} を (i, j) 成分が 1 で, それ以外の成分が 0 の n 次正方行列とすると, H_0 の $\mathbb{R}$ 上の基底として,

$$ \begin{cases} E_{ij} + E_{ji}, & 1 \leqq i < j \leqq n, \\ \sqrt{-1}E_{ij} - \sqrt{-1}E_{ji}, & 1 \leqq i < j \leqq n, \\ E_{ii}, & 1 \leqq i \leqq n, \end{cases} $$

をとることができる．よって,

$$\dim_{\mathbb{R}} H_0 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2$$

である．上で, $\dim_{\mathbb{R}} H_1 = \dim_{\mathbb{R}} H_0$ を示しているので,

$$\dim_{\mathbb{R}} H_1 = n^2$$

もいえる．

[別解]

$A \in H_0 \cap H_1$ とすると $A^* = A$ かつ $A^* = -A$ であり、$A = -A$ つまり $A = 0$ である。また任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\frac{1}{2}(A + A^*) \in H_0, \quad \frac{1}{2}(A - A^*) \in H_1$$

である。

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$$

なので，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として $M_n(\mathbb{C}) = H_0 \oplus H_1$ であり $\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{C}) = 2n^2$ なので $\dim_{\mathbb{R}} H_0 = \dim_{\mathbb{R}} H_1 = n^2$ である。

$\boxed{2}$

sup ノルム $\|f\|_\infty$ を次のように定義する．

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

I 上で $\{f_n\}$ が f に一様収束することと $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ は同値である．

(1) $a \in I$ において f が連続であることを示す．任意の正数 $\varepsilon > 0$ をとり，まず $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$ となるような f_n を選んでおく．$f_n(x)$ は $x = a$ において連続であるから，$\delta > 0$ が存在して，$|x - a| < \delta$ ならば $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．この δ に対して，$|x - a| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \|f - f_n\|_\infty + \varepsilon + \|f_n - f\|_\infty < 3\,\varepsilon \end{aligned}$$

である．これは $f(x)$ が $x = a$ において連続であることを示す．

(2) 一様収束しないことを示す．容易に分かるように $f_n(x)$ は $g(x) = x^2$ に各点収束するので，もし一様収束していればその極限は g である．そこで $\|f_n - g\|_\infty > 2\pi$ を示せば十分である．ところが，$a_n = 2\pi n + \pi/2n$ とおくと $\sin(na_n) = \sin(2\pi n^2 + \pi/2) = 1$ であるから，

$$|f_n(a_n) - g(a_n)| = |(a_n + 1/n)^2 - a_n^2| = 2a_n/n + 1/n^2 > 2\pi$$

となり $\|f_n - g\|_\infty > 2\pi$ がわかる．

(注意 1) 実は $\|f_n - g\|_\infty = \infty$ である．(練習問題)

(注意 2) $x + \sin(nx)/n$ は x に $I = \mathbb{R}$ 上一様収束する．問題の (2) によって $F_n \to F$ が I 上一様収束していても F_n^2 は F^2 に一様収束するとは限らないことがわかる．しかし，もし $\{F_n\}$ が n について一様に有界であれば (つまり $\sup_n \|F_n\|_\infty < \infty$ ならば)，$F_n^2 \to F^2$ は一様収束である．(これも練習問題)

$\boxed{3}$
問題は,

$$F : S^1 \times S^1 \to \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$$

$(\exp(2\pi\theta_1), \exp(2\pi\theta_2)) \to \exp(2\pi\theta_1) + \exp(2\pi\theta_2)$ のランクを求めることである.(像の長さの最小値と最大値を取るところでランクが下がることが予想されることに注意.)

S^1 の局所座標を，$\theta \in [0,1) \to \exp(2\pi\theta)$ で定める．すると，この局所座標を用いて,

$$F : (\theta_1, \theta_2) \to (\sin(2\pi\theta_1) + \sin(2\pi\theta_2), \cos(2\pi\theta_1) + \cos(2\pi\theta_2))$$

とかけ，このヤコビ行列は,

$$\begin{pmatrix} 2\pi\cos(2\pi\theta_1) & 2\pi\cos(2\pi\theta_2) \\ -2\pi\sin(2\pi\theta_1) & -2\pi\sin(2\pi\theta_2) \end{pmatrix}$$

となる．この行列式は,

$$4\pi^2 \sin 2\pi(\theta_1 - \theta_2)$$

となり，これは $2\pi(\theta_1 - \theta_2) = 0, \pm\pi$ の時のみ 0 となる．以上から，$(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1$ について，$z_1 = \pm z_2$ のときはランクが 1 で，それ以外の時は 2.

[別解]

$\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\tilde{F}(a, b) = a + b$ で定める．$\tilde{F}$ は C^∞ 級の写像で $\tilde{F}|_{S^1 \times S^1} = F$ である．$T_{(a,b)}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ で $\tilde{F}$ のヤコビ行列 $J\tilde{F} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ である．また $(a, b) \in S^1 \times S^1$ のとき $T_{(a,b)}(S^1 \times S^1) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid u \perp a, v \perp b\}$ である．従って $\dim J\tilde{F}\left(T_{(a,b)}(S^1 \times S^1)\right) = 2$ と $a \neq \pm b$ は同値である.

$\boxed{4}$

$\underline{\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \text{ の場合.}}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ が ユークリッド整域であることを示せば, 一意素元分解整域であることがいえるので, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ が ユークリッド整域であることを示す. まず, $x, y \in \mathbb{Q}$ に対して,

$$N(x+\sqrt{-1}y) = (x+\sqrt{-1}y)(x-\sqrt{-1}y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}_{\geqq 0}$$

とおく. このとき, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ に対して,

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta),$$
$$\alpha = 0 \Longleftrightarrow N(\alpha) = 0$$

が成り立つ. いま, $\alpha \neq 0$ を $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の元とし, $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ とすると, $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ なので, ある $a, b \in \mathbb{Q}$ が存在して,

$$\frac{\beta}{\alpha} = a + \sqrt{-1}b$$

と書くことができる. このとき, 整数 c, d として, $|a-c| \leqq \frac{1}{2}$, $|b-d| \leqq \frac{1}{2}$ となるものがとれるので, このような整数 c, d をとり, $r = a-c$, $s = b-d$ とおくと,

$$\beta = (c+\sqrt{-1}d)\alpha + (r+\sqrt{-1}s)\alpha$$

である. ここで, $\beta, \alpha, c+\sqrt{-1}d \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ なので, $(r+\sqrt{-1}s)\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ であり, しかも

$$N((r+\sqrt{-1}s)\alpha) = N(r+\sqrt{-1}s)N(\alpha) = (r^2+s^2)N(\alpha) \leqq \frac{1}{2}N(\alpha) < N(\alpha)$$

が成り立つ. 以上により, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ が ユークリッド整域であることが示されたので, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ は一意素元分解整域である.

$\underline{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \text{ の場合.}}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ では, 9 の既約元の積への分解が一意的ではないことを示す. 整数 9 は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において

$$9 = 3 \cdot 3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$$

と分解される. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の場合と同様に $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$N(x+\sqrt{-5}y) = (x+\sqrt{-5}y)(x-\sqrt{-5}y) = x^2 + 5y^2 \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$$

とおく．このとき, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ に対して,

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta),$$
$$\alpha = 0 \Longleftrightarrow N(\alpha) = 0$$

が成り立つ．いま, $x^2 + 5y^2 = 1$ の整数解は, $(x, y) = (\pm 1, 0)$ だけなので, $N(\alpha) = 1$ となる $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は $\alpha = \pm 1$ のみである．このとき, α は可逆元である．逆に α が可逆元であれば, $\alpha\beta = 1$ となる $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ が存在し, このとき, $N(\alpha)N(\beta) = 1$ なので, $N(\alpha), N(\beta)$ が 0 以上の整数であることから, $N(\alpha) = 1$ が分かり, $\alpha = \pm 1$ がいえる．つまり, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の可逆元は, ± 1 だけである．次に, $N(\alpha) = 9$ をみたす $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は既約元であることを示す．いま, $N(\alpha) = 9$ をみたす $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ が $\alpha = \beta\gamma$ と $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の積に書けたとすると, $9 = N(\alpha) = N(\beta)N(\gamma)$ である．ここで, $x^2 + 5y^2 = 3$ は整数解をもたないので, $N(\delta) = 3$ となる $\delta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は存在しないことが分かる．よって, $N(\beta), N(\gamma)$ は 3 ではないので, $N(\beta)$ か $N(\gamma)$ のどちらかは 1 となり, β, γ のどちらかは可逆元である．これは, α が既約元であることを意味する．とくに, $N(3) = N(2 + \sqrt{-5}) = N(2 - \sqrt{-5}) = 9$ なので, 3, $2 + \sqrt{-5}$, $2 - \sqrt{-5}$ は既約元である．よって,

$$9 = 3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$$

は 9 の既約元の積への分解であるが, 上で示したように, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の可逆元は ± 1 だけなので, 3 は $2 + \sqrt{-5}$ と $2 - \sqrt{-5}$ のどちらとも同伴元ではなく, 9 の既約元の積への分解は一意的ではない．ゆえに, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は一意素元分解整域ではない．

$\boxed{5}$

$H \subset G$ を正規離散部分群とする．任意の $h \in H$ と $g \in G$ について，$g^{-1}hg = h$ を示せばよい．

今，各 $h \in H$ について，連続写像：

$$I_h : G \to G$$

を $I_h(g) = g^{-1}hg$ で定める．H が正規であることから，この写像の像は，

$$I_h : G \to H$$

となる．G は連結であり，一般に連結集合の連続写像による像は連結である．また，$I_h(e) = h$ であることと，H が離散であることからすべての $g \in G$ について，$I_h(g) = h$ が成り立つ．

$\boxed{6}$

解答例 1

$f(z) = z^4 + 1$ とおく．$\rho = e^{\frac{\pi i}{4}} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ として

$$f(z) = (z-\rho)(z-\rho^3)(z-\rho^5)(z-\rho^7)$$

と因数分解できる．有理函数 $1/f$ は $\rho, \rho^3, \rho^5, \rho^7$ に 1 位の極をもつ.

$R > 1$ として，半円板 $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ をとる．その境界 ∂D_R に内部を左に見る向きをつける．∂D_R は実軸上の線分 $[-R, R]$ と半円周 $C_R : z = Re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le \pi)$ からなる．D_R の内部にある $1/f$ の極は ρ と ρ^3 の 2 点だから，留数定理により

$$(*) \qquad \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \Big\{ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{f}, \rho\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{f}, \rho^3\right) \Big\}$$

が成り立つ．ρ における留数は

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{f}, \rho\right) = \lim_{z\to\rho} \frac{z-\rho}{f(z)} = \lim_{z\to\rho} \frac{z-\rho}{f(z)-f(\rho)} = \frac{1}{f'(\rho)} = \frac{1}{4\rho^3} = -\frac{\rho}{4}.$$

同様に ρ^3 における留数は

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{f}, \rho^3\right) = \lim_{z\to\rho^3} \frac{z-\rho^3}{f(z)} = \lim_{z\to\rho^3} \frac{z-\rho^3}{f(z)-f(\rho^3)} = \frac{1}{f'(\rho^3)} = \frac{1}{4\rho^9} = -\frac{\rho^3}{4}.$$

よって，$(*)$ の右辺は $-\dfrac{2\pi i(\rho+\rho^3)}{4} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

また $(*)$ の左辺の第 2 の積分の絶対値は

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^4 e^{4i\theta}+1} d\theta \right| \le \frac{\pi R}{R^4-1}$$

これは $R \to \infty$ のとき 0 に収束する．したがって

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

求める広義積分は $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

解答例 2

$R>1$ として，1/4 円 $E_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R,\ \mathrm{Im}\, z > 0,\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ をとる．この境界 ∂E_R には内部を左に見る向きをつける．E_R の内部にある $1/f$ の極は ρ のみだから，留数定理より

$$\int_{\partial E_R} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{f}, \rho\right) = (1-i)\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

積分路は $\partial E_R = \Gamma_R^1 + \Gamma_R^2 - \Gamma_R^3$ と表わせる．ただし

$$\begin{aligned} &\Gamma_R^1 : z = x \quad (0 \le x \le R) \\ &\Gamma_R^2 : z = Re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le \pi/2) \\ &\Gamma_R^3 : z = it \quad (0 \le t \le R) \end{aligned}$$

ここで

$$\int_{\Gamma_R^3} \frac{dz}{z^4+1} = \int_0^R \frac{idt}{t^4+1} = i\int_0^R \frac{dx}{x^4+1}$$

だから

$$(1-i)\int_0^R \frac{dx}{x^4+1} + \int_{\Gamma_R^2} \frac{dz}{z^4+1} = (1-i)\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

また

$$\left|\int_{\Gamma_R^2} \frac{dz}{f(z)}\right| = \left|\int_0^{\pi/2} \frac{iRe^{i\theta}}{R^4 e^{4i\theta}+1} d\theta\right| \le \frac{\pi}{2}\frac{R}{R^4-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

したがって求める広義積分は

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

解答例 3

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

である．$1/(x^4+1)$ の部分分数分解を未定係数法で求めると

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

これは

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+\sqrt{2})+\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}(2x-\sqrt{2})+\frac{1}{4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

と変形できるから，この不定積分は

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)+\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)\right\}$$

よって求める広義積分は

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$