数学基礎実習筆記試験問題

(1) $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列全体のなす集合 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の部分集合 $H_0,\ H_1$ を

$$H_0 = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = A\}, \qquad H_1 = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = -A\}$$

で定義する．このとき次の問に答えよ．

(i) H_0, H_1 は，$\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{R}$ 上の部分ベクトル空間であることを示せ．

(ii) $A \in H_0$ ならば，$\sqrt{-1}A \in H_1$ を示せ．ただし，$\sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} H_0,\ \dim_{\mathbb{R}} H_1$ を求めよ．

(2) 区間 I 上の実数値函数 f と実数値函数列 $\{f_n\}$ について，次の問に答えよ．

(i) I 上で，f_n が連続で，$\{f_n\}$ が f に一様収束するとき，f は連続函数であることを示せ．

(ii) 函数 f_n を

$$f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\sin nx\right)^2$$

で定めるとき，函数列 $\{f_n\}$ は $I = \mathbb{R}$ 上で一様収束するか．

(3) S^1 を $\mathbb{R}^2$ の部分多様体と見る．$S^1 \times S^1$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 $f\colon (p,q) \longmapsto p+q$ の各点におけるヤコビ行列の階数を求めよ。但し，$p+q$ は $\mathbb{R}^2$ 内での和を表す．

(4) 次の環は一意素元分解整域 (UFD) か。理由を付けて答えよ。

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}], \quad \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$$

(5) G を連結な位相群とし、H をその正規部分群とする。H が，G の部分空間として離散空間であるならば，H は G の中心に含まれることを示せ．

(6) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

2006 年 7月 19 日実施