

Alexander 多項式について

大城佳奈子*, 清水理佳†, 張娟姫‡, 鈴木咲衣§

第 4 回琵琶湖若手数学者勉強会 B 班

概要

結び目の多項式不変量である Alexander 多項式を, Seifert 行列による方法, 無限巡回被覆による方法, 結び目群による方法, スケイン関係式による方法で定義し, それらの関係について述べる. また, Alexander 多項式と色付き Jones 多項式の関係について述べる.

1 はじめに

r 成分の 絡み目 (link) L とは, 3 次元空間 \mathbb{R}^3 に埋め込まれた r 個の単純閉曲線のことである. 1 成分の絡み目 K のことを 結び目 (knot) という. 絡み目の各成分に向きが与えられているとき, 絡み目は 向き付けられている (oriented) という. 向き付けられた絡み目 L_1 と L_2 が 同値であるとは, $h(L_1) = L_2$ を満たすような, 向きを保つ同相写像 $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在することである. 絡み目不変量 (link invariant) とは, 同値な絡み目に対して同じ値をとる絡み目の集合からの写像であり, 絡み目の同値性を判定するための道具でもある. 特に, 結び目に対してはこれを 結び目不変量 (knot invariant) と呼ぶ. 結び目解消数, 彩色可能性, 組み紐指数, また曲面や補空間による不変量等, 結び目理論において様々な不変量が考えられてきた. ここでひとつ, 絡み目不変量の例として, 絡み数を見てみよう. $L = L_1 \cup L_2$ を 2 成分の向き付けられた絡み目とする. ここで L_1, L_2 はそれぞれ結び目成分を表す. L のある 図式 (diagram), すなわち L の平面への射影図において各交点に上下の情報を加えたもの (交差点 (crossing point) という) を $D = D_1 \cup D_2$ で表す (図 2). 図式 D の各交差点 p に符号 $\varepsilon(p)$ を図 1 のように与える.

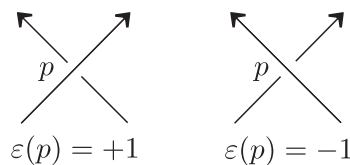


図 1

絡み目の図式 $D = D_1 \cup D_2$ における D_1 と D_2 の 絡み数 (linking number) $lk(D_1, D_2)$ とは, D_1 と D_2 の間の全ての交差点における符号の和の, 半分の値のことである. すなわち,

$$lk(D_1, D_2) = \frac{1}{2} \sum_{p \in D_1 \cup D_2} \varepsilon(p).$$

* 広島大学大学院理学研究科, 日本学術振興会特別研究員 PD, koshiro@hiroshima-u.ac.jp

† 大阪市立大学大学院理学研究科, 日本学術振興会特別研究員 DC2, shimizu1984@gmail.com

‡ 広島大学大学院理学研究科, 日本学術振興会特別研究員 DC2, yeonheejang@hiroshima-u.ac.jp

§ 京都大学数理解析研究所, 日本学術振興会特別研究員 DC2, sakie@kurims.kyoto-u.ac.jp

例えば, 図 2 において, D_1 と D_2 の絡み数は, $lk(D_1, D_2) = (-1 - 1)/2 = -1$ である. 絡み数は, 図式のとり方に依らず, 絡み目に対して値が一意に定まる. つまり絡み数は絡み目不変量である.

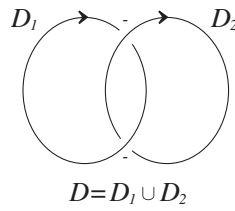


図 2

本稿では絡み目の古典的な多項式不変量 (1928 年に作られた初めての多項式不変量) で, 今日も様々な方面から研究されている不変量である Alexander 多項式を扱う. 絡み目が張る曲面の Seifert 行列による定義 (2 章), 絡み目の無限巡回被覆のホモロジーによる定義 (3 章), 結び目群の表示による定義 (4 章), スケイン関係式による定義 (5 章) 等, Alexander 多項式の定義は多様である. 本稿では結び目の Alexander 多項式をこれらの方法によって定義し, 一部の同値性を確かめ, Alexander 多項式と Jones 多項式の関係性を記述する.

2 Seifert 行列による Alexander 多項式の定義

結び目 K の Seifert 曲面 (Seifert surface) F とは, 3 次元空間 \mathbb{R}^3 に埋め込まれた, 向き付けられた連結でコンパクトな曲面で, その境界が K となるようなものである. すなわち, F の向きは境界 K の向きに同調しているものである. 例えば, 図 3 に描かれた曲面 F は左手型三葉結び目 K の Seifert 曲面である.

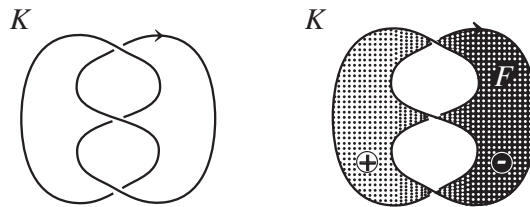


図 3

次のことが成り立つ:

命題 2.1. 任意の向き付けられた絡み目 L に対して, L の Seifert 曲面が存在する.

証明. Seifert のアルゴリズムによって示す. これは, 絡み目図式から Seifert 曲面を構成する方法である. D を絡み目 L の連結な図式とする. まず, D の全ての交差点において, 図 4 に表される操作, スムージングを行う.

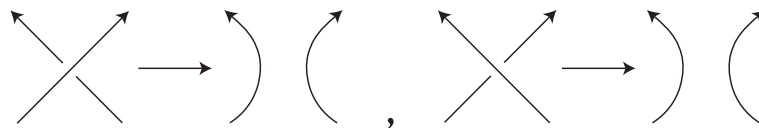


図 4

スムージングによって得られた図式を D_0 とする. D_0 は交差点を持たないいくつかの円周である. 次に, これらの円周に曲面を張り, 円周に合わせて曲面に向きを与える. ただし, 円周の中に円周がある場合は, 一方の円周を平面から少し持ち上げることで, 曲面どうしが重ならないようにしておく. 最後に, スムージングを行ったところに図 5 のように半ひねりしたバンドを貼り付ける.

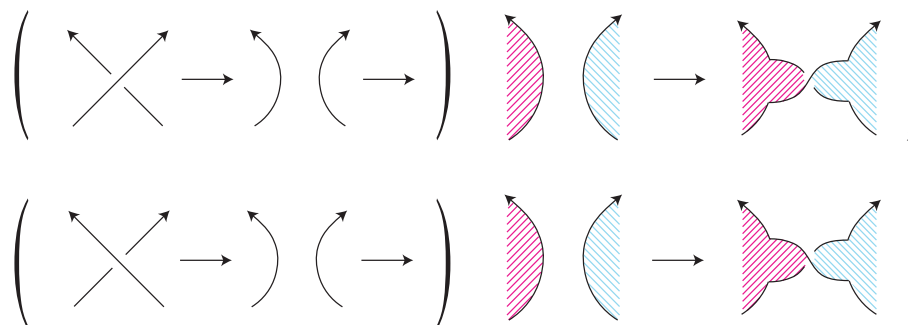


図 5

バンドの境界には自然に向きが入る. バンドによってつなげられた曲面は向き付け可能であり, その境界はもとの絡み目 L になっている. よって, この曲面は L の Seifert 曲面である. \square

図 3 の結び目 K の Seifert 曲面 F は Seifert のアルゴリズムによって得られるものである (図 6).

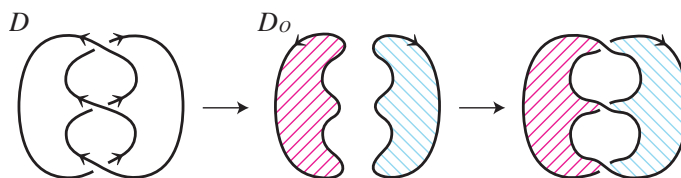


図 6

結び目 K に対して全ての Seifert 曲面 F の種数 $g(F)$ の最小値を K の種数 (genus) といい, $g(K)$ で表す. 特に, 結び目 K が $g(K) = 0$ ならば, K は自明な結び目である. 種数は結び目不変量である.

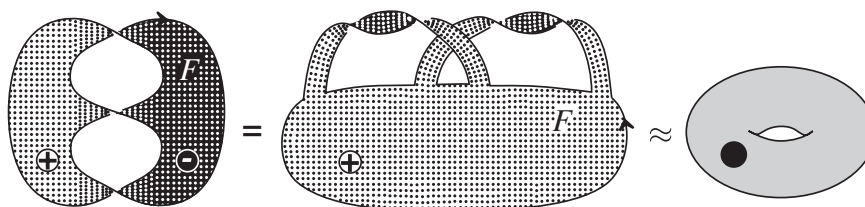


図 7

図 3 に描かれた結び目 K の種数は 1 である (図 7). 結び目 K の, 種数 g の Seifert 曲面 F の整数係数ホモロジー $H_1(F)$ は \mathbb{Z}^{2g} と同型である.

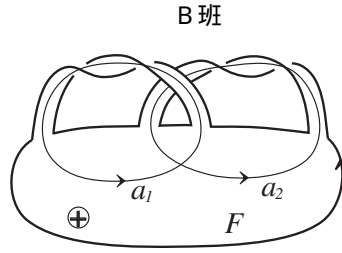


図 8

$H_1(F)$ の基底 $(a_1, a_2, \dots, a_{2g})$ をひとつとる (図 8). ループ a_i に対して, 曲面 F からプラスの方向に a_i を押し出したものを a_i^+ で表す (図 9).

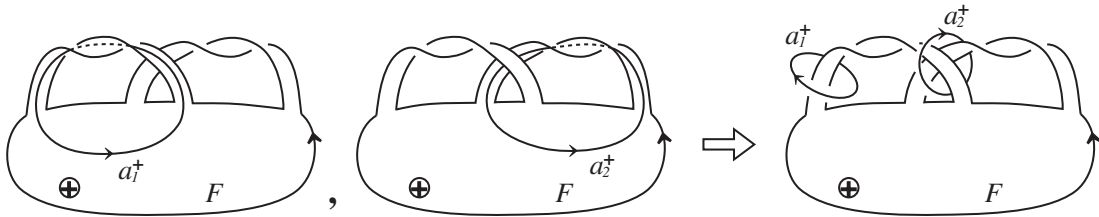


図 9

ここで, 絡み数 $a_{ij} = lk(a_i, a_j^+)$ を計算する. 例えば図 8 の a_1, a_2 に対して, $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 0, a_{22} = 1$ である (図 10). 全ての i, j について計算して並べた n 次正方行列 $V = (a_{ij})$ を, K の Seifert 行列 (Seifert matrix) と呼ぶ. 例えば, 図 8 において,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. K の Seifert 行列は, Seifert 曲面 F の選び方, 基底の選び方に依るので K に対して一意に定まるものではない.

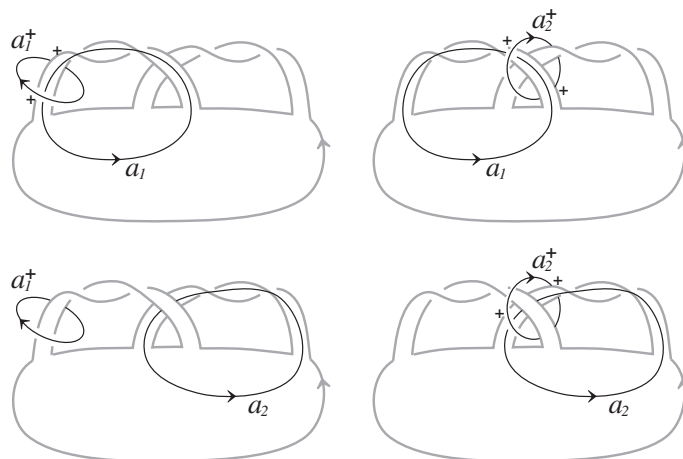


図 10

結び目 K の Seifert 行列 V に対して, 変数 t の多項式

$$A(K; t) = \det(tV^T - V)$$

は, $\pm t^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) 倍を無視すると結び目 K の不変量になる. これを K の Alexander 多項式 (Alexander polynomial) という. 例えば, 図 3 の結び目 K の Alexander 多項式 $A(K; t)$ は K の Seifert 行列 V から次のようにして得られる:

$$\begin{aligned} A(K; t) &= \det \left(t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ t & t-1 \end{pmatrix} \\ &= t^2 - t + 1. \end{aligned}$$

3 無限巡回被覆による Alexander 多項式の定義

結び目 K の無限巡回被覆 (infinite cyclic cover) とは, 次のように得られる 3 次元多様体のことである. まず, F を K の Seifert 曲面とし, K の外部空間 $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{N}(K)$ を X で表す. (ここで, $\mathcal{N}(K)$ は \mathbb{R}^3 における K の開正則近傍を表す.) 埋め込み

$$B : (F \cap X) \times (-1, 1) \rightarrow X$$

を $B((F \cap X) \times 0) = F \cap X$ となるように選び, N, N^+, N^-, Y を

$$\begin{aligned} N &:= B((F \cap X) \times (-1, 1)) \\ N^+ &:= B((F \cap X) \times (0, 1)) \\ N^- &:= B((F \cap X) \times (-1, 0)) \\ Y &:= X \setminus F \end{aligned}$$

で定める. (N, N^+, N^-) と (Y, N^+, N^-) の可算無限個のコピーを作り, それらを (N_i, N_i^+, N_i^-) と (Y_i, N_i^+, N_i^-) で表す ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). $\tilde{N} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} N_i$ と $\tilde{Y} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} Y_i$ をそれぞれ N_i と Y_i の非交和とし, 全ての i に対して $N_i^+ \subset Y_i$ と $N_i^+ \subset N_i, N_i^- \subset Y_i$ と $N_{i+1}^- \subset N_{i+1}$ を同一視して得られる多様体を \tilde{X} とする (図 11). この多様体のことを K の無限巡回被覆と呼ぶ.

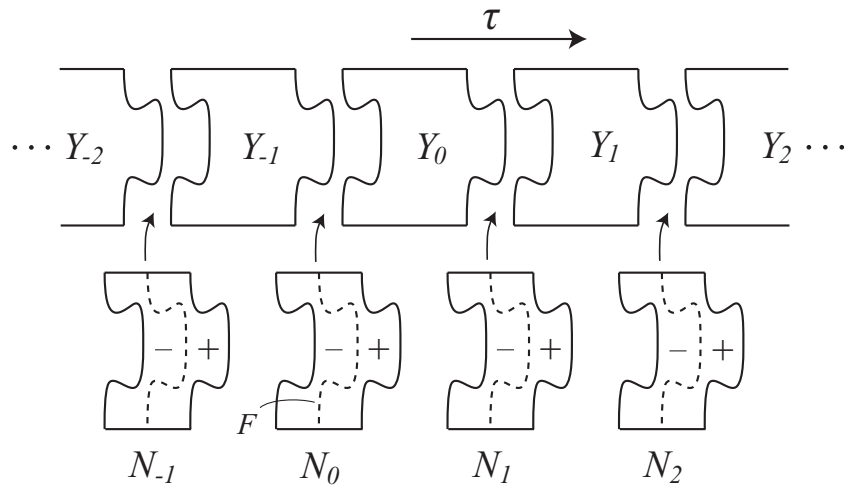


図 11

命題 3.1. \tilde{X} は普遍アーベル被覆である.

証明. \tilde{X} の被覆変換群 $\text{Aut}(\tilde{X})$ は無限巡回群であることに注意すると, 完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X) \longrightarrow \text{Aut}(\tilde{X})(\cong \mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

が得られる. この完全列から, $p_*\pi_1(\tilde{X})$ は $\pi_1(X)$ の交換子群 C を含むことがわかる. これから誘導される写像

$$\pi_1(X)/C(\cong \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Aut}(\tilde{X})(\cong \mathbb{Z})$$

の核は $p_*\pi_1(\tilde{X})/C$ である. 一方, 全射であることから上の写像は同型であることがわかる. よって, $p_*\pi_1(\tilde{X}) \cong C$ となり, 命題が従う. \square

命題 3.1 により, \tilde{X} は K の結び目同値類のみに依存することがわかる.

Λ を整数係数の (有限次数の) Laurant 多項式の成す環とする. つまり, Λ の元は

$$c_{-r}t^{-r} + \cdots + c_0 + c_1t + \cdots + c_st^s$$

(各 c_i は整数) の形をしていて, 和と積は通常が多項式の和と積で定義されている. (Λ を $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 等で表すこともある.) \tilde{X} を結び目 K の無限巡回被覆とし, $\tau: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ をその被覆変換群の生成元とする. $H_i(\tilde{X})$ を \tilde{X} のホモロジーとし, $\tau_*: H_i(\tilde{X}) \rightarrow H_i(\tilde{X})$ を τ が誘導する $H_i(\tilde{X})$ の自己準同型とする. Λ の元 $p(t) = c_{-r}t^{-r} + \cdots + c_0 + c_1t + \cdots + c_st^s$ と $H_i(\tilde{X})$ の元 α の積を

$$p(t)\alpha = c_{-r}\tau_*^{-r}\alpha + \cdots + c_0\alpha + c_1\tau_*\alpha + \cdots + c_s\tau_*^s\alpha$$

と定義すると, $p(t)\alpha$ は再び $H_i(\tilde{X})$ の元になる. この積によって $H_i(\tilde{X})$ は (左) Λ -加群になる. $H_i(\tilde{X})$ の Λ -加群としての構造は結び目の同値類のみに依存することが知られており, これを K の i 次元 Alexander 不変量 (i -th Alexander invariant) と呼ぶ.

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \mid \rho_1, \dots, \rho_q \rangle$$

を $H_i(\tilde{X})$ の Λ -加群としての表示とすると, 各関係式 ρ_i は $\rho_i = a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{ip}\alpha_p$ ($a_{ij} \in \Lambda$) のように生成元の線形結合として表される. (特に, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ として $H_i(X \setminus F)$ の生成元を取ることが出来る.) このとき, a_{ij} を (i, j) -成分とする $p \times q$ 行列 $P = (a_{ij})$ を $H_i(\tilde{X})$ の上の表示に関する表現行列 (presentation matrix) と呼ぶ. P を $H_i(\tilde{X})$ のある Λ -加群表示に関する表現行列としよう. すると, P を次のように変形させて得られる行列は, 再び $H_i(\tilde{X})$ のある Λ -加群表示に関する表現行列である. しかも, その二つの Λ -加群表示は Λ -加群準同型で移り合う.

- (1) 二つの行, 又は二つの列を交換する.
- (2) 任意の行に他の行の Λ -線形結合を加える.
- (3) 任意の列に他の列の Λ -線形結合を加える.
- (4) 一つの行, 又は列に Λ の単元をかける.
- (5) P を次の行列に置き換える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

- (6) (5) の逆操作を行う.
- (7) 幾つかの行の Λ -線形結合を新しい行として追加する.
- (8) 一つの行が他の行の Λ -線形結合になっているとき, その行を削除する.

操作 (1) から (4) は基底の取り換えに, 操作 (5) は新しい生成元とそれを既存の生成元の語で書き表した関係式の追加に, 操作 (6) は余分な生成元の削除に, そして操作 (7) と (8) は余分な関係式の追加と削除に対応する. また, $H_i(\tilde{X})$ の二つの Λ -加群表示に関する表現行列は上の操作の有限列で移り合うことも知られている.

P を $H_1(\tilde{X})$ のある Λ -加群表示に関する表現行列とする. P の全ての $q \times q$ 部分行列式が生成する Λ のイデアルを $H_1(\tilde{X})$ のオーダーイデアル (order ideal) と呼ぶ. ($p < q$ のときのオーダーイデアルは, 自明なイデアルで定義する.) 特に, K が古典的な折れ線結び目 (折れ線で出来ている結び目又は折れ線の角を丸めて出来る結び目) のときは, 1次元 Alexander 不変量 $H_1(\tilde{X})$ が重要な役割を果たすことが知られている. $H_1(\tilde{X})$ の Λ -加群としての表示の表現行列を K の Alexander 行列 (Alexander matrix) と呼び, そのオーダーイデアルを K の Alexander イデアル (Alexander ideal) と呼ぶ.

定理 3.2. V を \mathbb{R}^3 中の折れ線結び目 K の Seifert 行列とすると, $tV^T - V$ は K の Alexander 行列である.

証明. F を K の Seifert 曲面とすると, F は円盤に $2g$ 個のバンドを貼り付けたものに同相である (図 12). V を $H_1(F)$ のある基底 a_1, \dots, a_{2g} に対応する Seifert 行列とする. すると, Seifert 行列の定義により, V の (i, j) -成分は $v_{i,j} = lk(a_i, a_j^+)$ である. X を K の外部空間とし, $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}$ を $H_1(X \setminus F)$ の基底とする, 特に, a_1, \dots, a_{2g} と $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}$ を図 12 のように取ることができる.

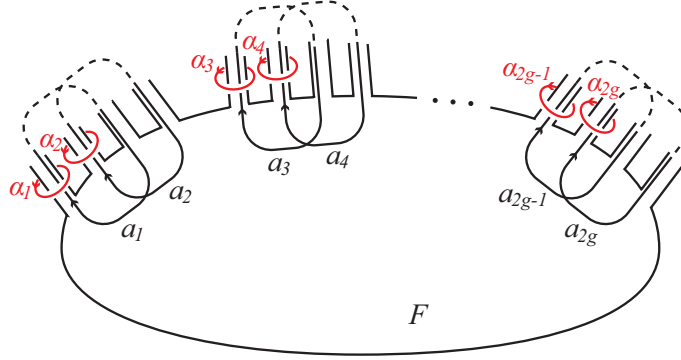


図 12

つまり, $lk(a_i, \alpha_j)$ は $i = j$ のときに 1, それ以外のときは 0 になる. すると, $H_1(X \setminus F)$ の任意の元 $\alpha = \sum_{j=1}^{2g} c_j \alpha_j$

に対し, $lk(a_i, \alpha) = \sum_{j=1}^{2g} lk(a_i, c_j \alpha_j) = \sum_{j=1}^{2g} c_j lk(a_i, \alpha_j) = c_i$ が成立つ. $H_1(\tilde{X})$ は Λ -加群として

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{2g} \mid a_i^- = t a_i^+ (i = 1, \dots, 2g) \rangle$$

のような表示を持つことに注意する. 各関係式 $a_i^- = t a_i^+$ を α_j について書き換えると,

$$\sum_j lk(a_i^-, a_j) \alpha_j = t \left[\sum_j lk(a_i^+, a_j) \alpha_j \right]$$

になる. $lk(a_i^-, a_j) = lk(a_i, a_j^+) = v_{i,j}$ より, 上の関係式は

$$\sum_j (t v_{j,i} - v_{i,j}) \alpha_j = 0$$

と書き換えることができる. よって, $tV^T - V$ は K の Alexander 行列である. \square

上の定理によって, K が折れ線結び目の場合は 1次元 Alexander 不変量 $H_1(\tilde{X})$ の表現行列として正方行列を取ることができ, $H_1(\tilde{X})$ のオーダーイデアルは単項イデアルであることが分かる. このイデアルの生成元を K の Alexander 多項式 (Alexander polynomial) と呼ぶ. 定理 3.2 によって, Seifert 行列による Alexander 多項式の定義と無限巡回被覆による Alexander 多項式の定義が同値であることが分かる.

実際に、図 3 の結び目 K について、無限巡回被覆を用いる方法で Alexander 多項式を計算してみよう。 $H_1(F)$ の生成元 a_1, a_2 と $H_1(X \setminus F)$ の生成元 α_1, α_2 を図 13 のように取ると、

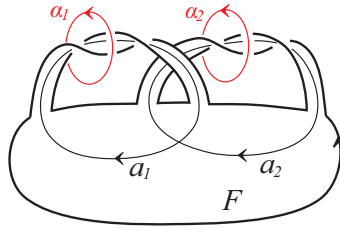


図 13

$$\begin{aligned} a_1^+ &= \alpha_1, & a_1^- &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_2^+ &= \alpha_1 + \alpha_2, & a_2^- &= \alpha_2 \end{aligned}$$

である。よって、 Λ -加群として

$$\begin{aligned} H_1(\tilde{X}) &= \langle \alpha_1, \alpha_2 \mid t\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, t(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2 \rangle \\ &= \langle \alpha_1, \alpha_2 \mid (t-1)\alpha_1 - \alpha_2 = 0, t\alpha_1 + (t-1)\alpha_2 = 0 \rangle \end{aligned}$$

になり、これに関する表現行列は

$$P = \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ t & t-1 \end{pmatrix}$$

である。従って、 K の Alexander 多項式は

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ t & t-1 \end{pmatrix} = t^2 - t + 1$$

である。しかも、 $P = tV^T - V$ であることも確認できる。

4 結び目群の表示による Alexander 多項式の定義

K を \mathbb{R}^3 内に埋め込まれた結び目とする。 K の外部空間 $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{N}(K)$ の基本群を K の結び目群と呼ぶ。ここでは結び目群の表示から Alexander 多項式を計算する方法を解説する。

G を任意の群とする。群環 $\mathbb{Z}G$ 上で定義される写像 $D: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}G$ が微分子であるとは、次を満たすときをいう: 任意の元 $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}G$ に対し、

$$\begin{aligned} D(\nu_1 + \nu_2) &= D(\nu_1) + D(\nu_2), \\ D(\nu_1\nu_2) &= D(\nu_1)\iota(\nu_2) + \nu_1 D(\nu_2). \end{aligned}$$

ただし、 ι は平凡射と呼ばれる環準同型写像

$$\iota: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}, \iota\left(\sum_i n_i g_i\right) = \sum_i n_i$$

を表す。

今、 F を x_1, \dots, x_n によって生成される自由群とする。

補題 4.1. 各生成元 x_j に対して、

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad (\text{クロネッカーのデルタ})$$

となる $\mathbb{Z}F$ の微分子 $D_j = \partial/\partial x_j$ が一意的に存在する。

これを x_j に関する微分子と呼ぶ.

G を有限表示 $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ を持つ群とし, F を元 x_1, \dots, x_n によって生成される自由群, R を関係式 r_1, \dots, r_m の F における帰結群とする. つまり, $G = F/R$ を満たす. $\gamma: F \rightarrow G = F/R$ を F から G への自然な準同型写像, α を G から $G/[G, G]$ へのアーベル化写像とする. ただし, $[G, G]$ は G の交換子群を表す. γ と α はそれぞれ \mathbb{Z} 係数の群環へ一意に拡張される. 従って, $H = G/[G, G]$ とすると次の構造が得られる.

$$\mathbb{Z}F \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}F \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}H.$$

群表示 $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ の Alexander 行列とは, $a_{ij} = \alpha\gamma(\frac{\partial r_i}{\partial x_j})$ によって定義された行列 (a_{ij}) のことである. ここで, α はすべてのものを可換環の中に持っていく写像であることを注意しておく. 可換環においては, 行列式が定義できる.

R を零でない乗法単位元 1 を持つ可換環とする. R の元を成分に持つ二つの行列 A と A' が同値である ($A \sim A'$) とは, 行列の有限列

$$A = A_1, A_2, \dots, A_N = A'$$

が存在して, A_i は A_{i+1} から次の操作 (i), \dots , (v) とそれぞれの逆の操作のいずれかによって得られるときをいう.

(i) 行または列の置換.

(ii) 零の行を付加すること. すなわち, $A \rightarrow \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) 一つの行に, 他の行の一次結合を加えること.

(iv) 一つの列に, 他の列の一次結合を加えること.

(v) 交差する成分が 1 で, 残りの成分が 0 であるような新しい一行一列を付加すること. すなわち,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

補題 4.2. 2 つの群の有限表示 $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle, \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{s} \rangle$ が表すそれぞれの群が同型であるとき, それぞれの群表示から得られる Alexander 行列は同値である.

A を R の元を成分に持つ $m \times n$ 行列とする. 非負整数 k に対して, A の k 番目の初等イデアル $E_k(A)$ を次のように定義する:

- $0 < n - k \leq m$ ならば, $E_k(A)$ は A のすべての $(n - k) \times (n - k)$ 小行列式の行列式によって生成されるイデアル.
- $n - k > m$ ならば, $E_k(A) = 0$.
- $n - k \leq 0$ ならば, $E_k(A) = R$

補題 4.3. 同値な行列は, 同じ初等イデアルの鎖を定める.

群の有限表示 $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ における k 番目の初等イデアルを $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ の Alexander 行列の k 番目の初等イデアルとして定義する. 補題 4.2 および補題 4.3 より, 初等イデアルは, 任意の有限で表示される群 G の不変量であることが言える.

K を \mathbb{R}^3 内に埋め込まれた結び目とする. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ を K の結び目群のある有限表示とする. 任意の非負整数 k に対し, 群表示 $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ の k 番目結び目多項式 Δ_k を群表示 $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ に対する Alexander 行列のあらゆる $(n - k) \times (n - k)$ 小行列式の最大公約数として定義する. ただし, $n - k > m$ ならば $\Delta_k = 0$, $n - k \leq 0$ ならば $\Delta_k = 1$ とする. ここで, 次のことに注意しておく: 結び目群 G のアーベル化 H は無限巡回群 $\langle t \rangle$ となる. 従って, $\mathbb{Z}H$ は \mathbb{Z} を係数環とする 1 変数ローラン多項式環 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ となる.

補題 4.4. 結び目多項式は必ず存在し, $\pm t^n$ 倍を除いて一意である. ただし, n は任意整数で, t は結び目群をアーベル化して得られる無限巡回群の生成元である.

結び目群のある有限表示に対する結び目多項式 Δ_k と初等イデアル E_k の間には次の関係がある.

補題 4.5. 群表示 $\langle x \mid r \rangle$ の各結び目多項式 Δ_k は, $\langle x \mid r \rangle$ の初等イデアル E_k を含む最小の単項イデアルの生成元である.

ここでは, 結び目多項式を結び目群のある有限表示に対して定義したが, 初等イデアルは任意の有限で表示される群の不変量であること, および補題 4.5 から, 結び目多項式が単元倍を除いて結び目の不変量になることが言える. 特に重要な結び目多項式は一番目の結び目多項式 Δ_1 であり, これは結び目の Alexander 多項式と呼ばれる.

第 3 章で定義された無限巡回被覆による Alexander 多項式と結び目群の表示から得られる Alexander 多項式は同値である. このことについて見ていこう.

X を結び目 K の外部空間, \tilde{X} を X の無限巡回被覆とする. K の結び目群 $G = \pi_1(X)$ の交換子群を C と表すとき, $H_1(\tilde{X})$ と $C/[C, C]$ は同型である. x を G の元でアーベル化写像によって G/C の生成元に送られる元とする. 写像 $t: C/[C, C] \rightarrow C/[C, C]$ を $t([c]) = [xcx^{-1}]$ で定義する. これは well-defined に定義される.

K の結び目群 G の群表示と $H_1(\tilde{X})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -加群としての表示を次の様を選ぶことが出来る.

$$\pi_1(X) = \langle x, a_1, \dots, a_p \mid s_1, \dots, s_p \rangle.$$

$$H_1(\tilde{X}) = \langle a'_1, \dots, a'_p \mid s'_1, \dots, s'_p \rangle.$$

ここで, a_1, \dots, a_p は C の元, a'_1, \dots, a'_p は a_1, \dots, a_p をそれぞれアーベル化した元を表す. また, 各 $s_i (i \in \{1, \dots, p\})$ は $x^k a_j^{\pm 1} x^{-k}$ の形をした元の積で表され, s'_i は s_i から次のように与えられる.

$$s_i = \prod_l x^{k_l} a_{j_l}^{\epsilon_l} x^{-k_l} \text{ とするとき, } s'_i = \sum_l \epsilon_l t^{k_l} (a'_{j_l}).$$

上で与えられた結び目群の表示から Alexander 行列を求めると次の様になる.

$$\left(\alpha \gamma \frac{\partial}{\partial x} (s_i) \quad \alpha \gamma \frac{\partial}{\partial a_j} (s_i) \right)$$

計算によって, 任意の $i \in \{1, \dots, p\}$ に対し, $\alpha \gamma \frac{\partial}{\partial x} (s_i) = 0$ を得る. 従って, K の Alexander 多項式 Δ_1 は小行列

$$\left(\alpha \gamma \frac{\partial}{\partial a_j} (s_i) \right)$$

の行列式によって与えられる. 一方, $H_1(\tilde{X})$ の表示に関する表現行列は

$$\left(\alpha \gamma \frac{\partial}{\partial a_j} (s_i) \right)$$

で与えられる. 従って, 定義により, $H_1(\tilde{X})$ の表示から得られる Alexander 多項式と結び目の群表示から得られる Alexander 多項式は一致する.

図 3 の結び目 K のある群表示を用いて上で定義された結び目多項式および Alexander 多項式を実際に計算してみよう. K の結び目群は次のような群表示を持つ:

$$G(K) = \langle x, y \mid xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1} \rangle.$$

Alexander 行列 $A = (a_{11} a_{12})$ の二つの成分は次のようになる.

$$a_{11} = \alpha \gamma \frac{\partial}{\partial x} (xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}) = \alpha \gamma (1 + xy - xyxy^{-1}x^{-1}),$$

$$a_{12} = \alpha\gamma \frac{\partial}{\partial y}(xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}) = \alpha\gamma(x - xyxy^{-1} - xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}).$$

$\alpha\gamma(x) = \alpha\gamma(y) = t$ において,

$$A = (1 - t + t^2 \quad -1 + t - t^2)$$

を得る. 従って, $\Delta_1 = 1 - t + t^2$, $\Delta_k = 0$ ($k \geq 2$) となる. 三葉結び目の Alexander 多項式は $1 - t + t^2$ である.

5 Alexander 多項式と Jones 多項式

ここまでは Alexander 多項式の 3 つの同値な定義を見てきた. 最後に Alexander 多項式と Jones 多項式の関係 (Melvin-Morton conjecture [13]; solved by D. Bar-Natan and S. Garoufalidis [1]) を紹介する. 標語的に言うと,

結び目の Alexander 多項式は色付き Jones 多項式から得られる.

色つき Jones 多項式の定義にはいくつかの方法があるが, この報告書では作用素不変量 (Operator invariant) として定義する. そのためにまずリー代数 sl_2 に付随した量子展開環 $U_h(sl_2)$ とそのリボンホップ代数構造を定義する. また, 本稿では絡み目はすべて向きの付いたものを考える.

5.1 量子展開環 $U_h(sl_2)$

次の q -整数を用いる: $i \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \{i\} &= q^{i/2} - q^{-i/2}, \quad \{i\}_n = \{i\}\{i-1\}\cdots\{i-n+1\}, \quad \{n\}! = \{n\}_n \\ [i] &= \{i\}/\{1\}, \quad [n]! = [n][n-1]\cdots[1], \quad \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} = \{i\}_n/\{n\}! \end{aligned}$$

h を不定元とした形式的冪級数環を $\mathbb{Q}[[h]]$ と書く. 量子展開環 $U_h(sl_2)$ とは, トポロジカルに H, E, F で生成され, 関係式

$$HE - EH = 2E, \quad HF - FH = -2F, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

で定義される h 進完備 $\mathbb{Q}[[h]]$ -代数である. ただし,

$$q = \exp h, \quad K = q^{H/2} = \exp \frac{hH}{2}$$

とおいた. $U_h(sl_2)$ には, 以下で (完備化された) リボンホップ代数構造が入る.

余積 $\Delta: U_h \rightarrow U_h \hat{\otimes} U_h$, 余単位射 $\varepsilon: U_h \rightarrow \mathbb{Q}[[h]]$, 対合射 $S: U_h \rightarrow U_h$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad \varepsilon(H) = 0, \quad S(H) = -H \\ \Delta(E) &= E \otimes 1 + K \otimes E, \quad \varepsilon(E) = 0, \quad S(E) = -K^{-1}E \\ \Delta(F) &= F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \quad \varepsilon(F) = 0, \quad S(F) = -FK \end{aligned}$$

普遍 R -行列 $R \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2}$ とその逆元は次で与えられる.

$$\begin{aligned} R &= D \left(\sum_{n \geq 0} q^{\frac{1}{4}n(n-1)} \frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})^n}{[n]!} F^n \otimes E^n \right) \\ R^{-1} &= \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{-\frac{1}{4}n(n-1)} \frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})^n}{[n]!} F^n \otimes E^n \right) D^{-1} \end{aligned}$$



図 14 基本図 (向きは任意)

ただし, $D = q^{\frac{1}{4}H \otimes H} = \exp\left(\frac{h}{4}H \otimes H\right)$ とおいた.

リボン元 $r \in U_h(sl_2)$ とその逆元は次で与えられる.

$$r = \sum \bar{\alpha} K^{-1} \bar{\beta} = \sum \bar{\beta} K \bar{\alpha}, \quad r^{-1} = \sum \alpha K \beta = \sum \beta K^{-1} \alpha$$

ただし $R = \sum \alpha \otimes \beta$, $R^{-1} = (S \otimes 1)R = \sum \bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}$ とおいた.

5.2 色つき Jones 多項式

$L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ を枠付き絡み目^{*1}, W_1, \dots, W_n を $U_h(sl_2)$ の有限次元 (finite rank) 表現とする. L の W_1, \dots, W_n に付随する色つき Jones 多項式 $J_{sl_2, W_1, \dots, W_n}(L) \in \mathbb{Z}[q^{1/4}, q^{-1/4}]$ を以下で定める. まず L の図式 P を一つ選ぶ. ただし P は, 図 14 にある基本図を縦と横につなげて得られる枠付き絡み目の図式^{*2}とする. L に含まれる各基本図に対して $U_h(sl_2)$ -加群の射を次のように対応させる. まず L_i に含まれる下向きの線には W_i を, 上向きの線には双対加群 W_i^* を対応させておく. 基本図の, 右上から左下に線がつながっている交差と左上から右下に線がつながっている交差にはそれぞれ順に

$$\begin{aligned} \tau R: W \otimes W' &\rightarrow W' \otimes W, & x \otimes y &\mapsto \sum \beta y \otimes \alpha x \\ R^{-1} \tau: W \otimes W' &\rightarrow W' \otimes W, & x \otimes y &\mapsto \sum \bar{\alpha} y \otimes \bar{\beta} x, & x \in W, y \in W' \end{aligned}$$

を対応させる. ただし W は上の左の線に対応させた加群, W' は上の右の線に対応させた加群とする. 線が左向きの極小, 右向きの極小, 左向きの極大, 右向きの極大にはそれぞれ順に

$$\begin{aligned} \text{ev}: W^* \otimes W &\rightarrow \mathbb{Q}[[h]], & f \otimes x &\mapsto f(x) \\ \text{ev}^*: W \otimes W^* &\rightarrow \mathbb{Q}[[h]], & x \otimes f &\mapsto f(K^{-1}x) \\ \text{coev}: \mathbb{Q}[[h]] &\rightarrow W \otimes W^*, & 1 &\mapsto \sum_i w_i \otimes w^i \\ \text{coev}^*: \mathbb{Q}[[h]] &\rightarrow W^* \otimes W, & 1 &\mapsto \sum_i w^i \otimes K w_i \end{aligned}$$

を対応させる. ただしその基本図が L_i に含まれているとき $W = W_i$ とする. ここで w_i は W の基底, w^i はその双対基底とした. 基本図 b, b' を横につなげる操作をテンソル積 $f(b) \otimes f(b')$ で, 縦につなげる (b を b' の下に) 操作を合成 $b \circ b'$ と対応させることで $\mathbb{Q}[[h]]$ から $\mathbb{Q}[[h]]$ への $U_h(sl_2)$ -加群の射が定まる. この射のトレースは図式の取り方によらずに定まり (cf. [14]), これを $J_{sl_2, W_1, \dots, W_n}(L)$ と定義する. 例えば図 15 のホップ絡み目 $L = L_1 \cup L_2$ に対して定まる $U_h(sl_2)$ -加群の射は次で表される.

*1 枠付き絡み目とは, 絡み目に, その法ベクトル束のいたるところ消えない切断を一つ指定したもの. 各成分の枠のイソトピークラスは, ベクトル方向に二重化した結び目もとの結び目との絡み数によって指定できる.

*2 図式平面に平行な枠 (brackboard framing) を指定することで枠付き絡み目を表す.

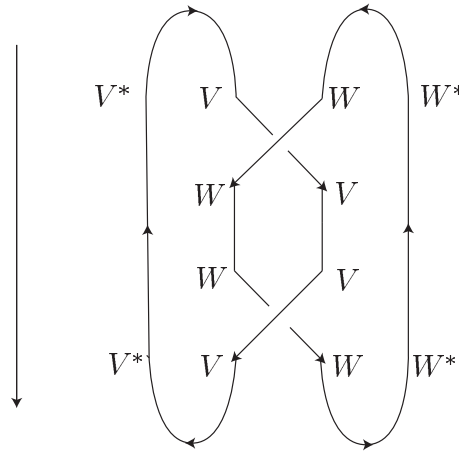


図 15 ホップ絡み目 $L = L_1 \cup L_2$; L_1 に V を, L_2 に W を対応させて得られる $U_h(sl_2)$ -加群の射の模式図

$$\begin{aligned}
 1 &\mapsto \sum v^i \otimes K v_i \otimes w_j \otimes w^j \\
 &\mapsto \sum v^i \otimes \beta w_j \otimes \alpha K v_i \otimes w^j \\
 &\mapsto \sum v^i \otimes \beta' \alpha K v_i \otimes \alpha' \beta w_j \otimes w^j \\
 &\mapsto \sum v^i (\beta' \alpha K v_i) \otimes w^j (K^{-1} \alpha' \beta w_j) = \text{tr}^V(\beta' \alpha K) \otimes \text{tr}^W(K^{-1} \alpha' \beta)
 \end{aligned}$$

ただし v_i, w_j はそれぞれ V, W の基底とし, v^i, w^j はそれぞれの双対基底とした. また $R = \sum \alpha \otimes \beta = \sum \alpha' \otimes \beta'$ おいた.

枠の付いていない絡み目 $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ に対して, L^0 を L の各成分に 0 枠を付けた絡み目とする. $\hat{J}_{sl_2, W_1, \dots, W_n}(L) = J_{sl_2, W_1, \dots, W_n}(L^0)$ とおくと, 枠の付いていない絡み目の不変量が得られる. これを枠の付いていない絡み目に対する色付き Jones 多項式と呼ぶ. 枠の付いていない絡み目に対しての色付き Jones 多項式は $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ に値を持つことが知られている.

5.3 Alexander 多項式 ~ Conway-normalized version

ここでは Alexander 多項式をスケイン関係式で定義する. この定義は符号と t, t^{-1} の冪倍の不定性がないのが良い所の一つであり, 出来た多項式は特に Conway 多項式とも呼ばれる (cf. [6]).

定義 5.1. 枠の付いていない絡み目 L に対し, $C_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ を以下で定義する.

- (1) $C_{unknot}(t) = 1$
- (2) $C_{L_+}(t) - C_{L_-}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2})C_{L_0}(t)$

ただし L_+, L_-, L_0 はある点の近傍ではそれぞれ図 16 のようになっている, その他の場所では同じような 3 つの絡み目とした.

定理 5.2. 枠の付いていない絡み目 L に対し, $C_L(t)$ は Alexander 多項式 $A(L, t)$ と符号と $t^{1/2}, t^{-1/2}$ の冪倍を除いて一致する.

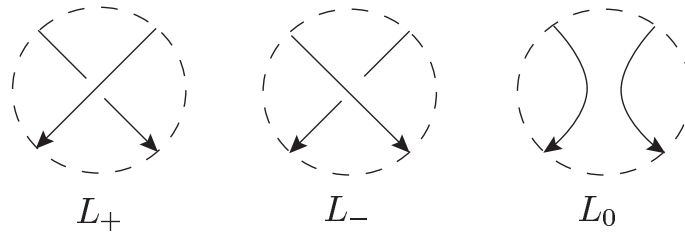


図 16 円周の外部分は同じであるような絡み目の 3 つ組み (Conway triple)

5.4 Melvin-Morton conjecture

V_d を $U_h(sl_2)$ の d 次元 (rank) 既約表現とする .

定理 5.3. 枠の付いていない結び目 K の色付き Jones 多項式 $\hat{J}_{sl_2, V_d}(K) \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ を d と h に関して次のように展開する (出来る . cf. [13]).

$$\frac{\hat{J}_{sl_2, V_d}(K)|_{q=\exp h}}{[d]} = \sum_{j, m \geq 0} a_{j, m}(K) d^j h^m \quad (5.1)$$

また ,

$$MM(K)(h) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m, m}(K) h^m$$

とおく . このとき次が成り立つ .

- (1) $j > m$ のとき $a_{j, m}(K) = 0$
- (2) $MM(K)(h) \cdot C_K|_{t=\exp h} = 1$

結び目 K の色つき Jones 多項式は K を多重化した絡み目の Jones 多項式から得られることが知られている . 従って , 定理 5.3 により , 結び目 K の Alexander 多項式は K の多重化の操作とその Jones 多項式から得られると言える .

5.5 証明のあらすじ

証明にはコード図と重み系を用いる . 証明の流れと記法は [1] に従う . 簡単に準備をする .

アーベル群に値をとる結び目不変量 V が与えられると ,

$$V(K_D) = V(K_+) - V(K_-)$$

により V は特異結び目^{*3}の不変量に拡張される . ただし K_D, K_+, K_- はある点の近傍が図 17 のようになっていて , その他の場所では同じような 3 つの特異結び目とした . 結び目不変量 V が $m+1$ 個の 2 重点を持つ任意の特異結び目 K に対して $V(K) = 0$ となるとき , V を次数 m の Vassiliev 不変量といい , そのような $m \geq 0$ が存在するとき V は有限型であるという . 一般に結び目の不変量は有限型とは限らないが , 量子不変量や Alexander 多項式の係数は有限型になることが知られている .

次数 m の Vassiliev 不変量は次数 $m+1$ の Vassiliev 不変量であるから , ある可換環 F に値をとる Vassiliev 不変量全体 \mathcal{V} の集合は , 次数 m の Vassiliev 不変量全体からなる部分集合 $\mathcal{F}_m \mathcal{V}$ によりフィルター付き (filtered)

^{*3} 円周 S^1 の \mathbb{R}^3 へのはめこみで , 特異点が 2 重点のみであるものを特異結び目と呼ぶ .

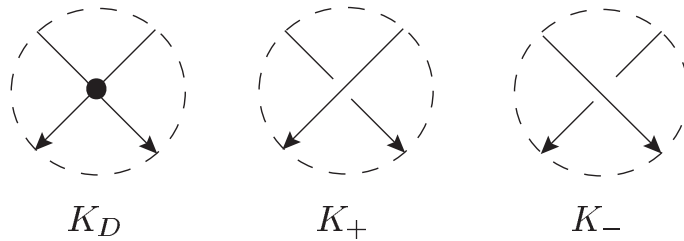


図 17 円周の外部分は同じであるような特異結び目 K_D, K_+, K_- の 3 つ組

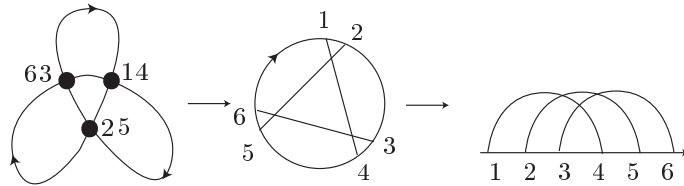


図 18 特異結び目とコード図の例

F 加群になる .

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots \subset \mathcal{V}$$

このとき対応する階数付き (graded) F 加群は F 上の重み系と呼ばれる空間と同型になる .

重み系について説明する . 次数 m の Vassiliev 不変量 V について , m 個の 2 重点を持つ特異結び目 K^m に対する値 $V(K^m)$ を考える . このとき , K^m から辺の自己交差を許したイソトピーで変形して \bar{K}^m が得られたとすると , $V(K^m) = V(\bar{K}^m)$ が従う . なぜなら , $V(K^m)$ と $V(\bar{K}^m)$ の差は , 自己交差の瞬間に現われる $m + 1$ 個の 2 重点を持つ特異結び目に対する V の値で表され , 定義によりそれは 0 だからである . よって与えられた V について $V(K^m)$ の値は K^m の 2 重点の組み合わせ的な情報 , すなわち円周上に並ぶ順序によって定まる . これを図式的に表すのがコード図である . コード図とは円周上の点の対を線で結んで出来る図形で , 特異結び目のひもを一周したときに 2 重点が現われる場所を円周上の点にマークし , 同じ 2 重点に対応するマークをコードで結ぶことにより特異結び目からコード図が定まる . 本稿では , コード図を円周上のある基点で切って水平に図示する (図 18 参照) . コード図全体が張る自由 F 加群に , 次で定めるで定める関係式 (4T relations)

(5.2)

を入れた空間を \mathcal{A} とかき , さらに次で定めるで定める関係式 (framing independence relation)

(5.3)

を入れた空間を \mathcal{A}^r とかく . ただし \ominus はその区間には他のコードがないという印とし , それ以外の場所にはすべての図に同時に同じコードを任意に付け加えることを許す . \mathcal{A}^r には , 可換かつ余可換なホップ代数構造が定まる . 2 つのコード図の積は横につなげるとして定義される .

関係式 (5.2) の帰結として , これは基点の取り方に依らない . コード図の余積は , コードのすべての分割の和 (重ね合わせたら元のコード図に戻るような 2 つのコード図 : 図 19 参照) として定義される .

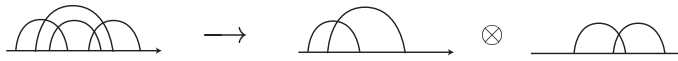
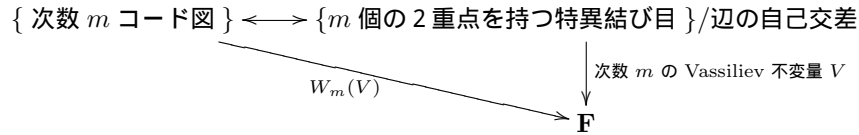


図 19 コード図とその一つの分割の例

$\mathcal{G}_m \mathcal{A}^r$ をコードの数が m 本のコード図からなる \mathcal{A}^r の部分 \mathbf{F} 加群とすると, \mathcal{A}^r は階数付けられた代数となる.

$$\mathcal{A}^r = \bigoplus_m \mathcal{G}_m \mathcal{A}^r, \quad \mathcal{G}_{m_1} \mathcal{A}^r \cdot \mathcal{G}_{m_2} \mathcal{A}^r \subset \mathcal{G}_{m_1+m_2} \mathcal{A}^r$$

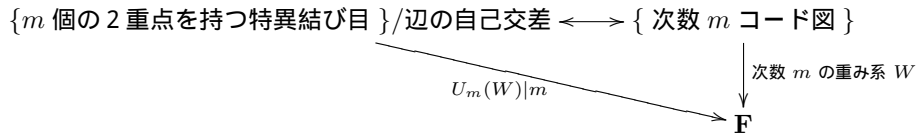
\mathbf{F} 加群の射 $\mathcal{A}^r \rightarrow \mathbf{F}$ 全体の集合 \mathcal{W} を重み系と呼ぶ. \mathcal{W} には \mathcal{A}^r の余代数構造から定義される代数構造が入る. 次数 m の Vassiliev 不変量 V に対して $W_m(V)$ を次で定義される重み系とする: 次数 m のコード図 D に, D をコード図に持つ m 個の 2 重点を持つ特異結び目 K^m に対する値 $V(K^m)$ を対応させる. 次数 m 以外のコード図には 0 を対応させる.



すなわち, 以下の射が矛盾なく定まる.

$$W_m: \mathcal{F}_m \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}_m \mathcal{W} = \mathcal{G}_m \mathcal{A}^{r*}$$

また, 次数 m の重み系 W に対して, $U_m(W)$ を次で定義される $m-1$ 次以下の Vassiliev 不変量を法とした次数 m の Vassiliev 不変量とする: m 個の 2 重点を持つ任意の特異結び目 K^m に対して $W(D)$ が対応するような不変量. ただし D は K^m のコード図とした.



(ただし $U_m(W)$ の $\{m$ 個の 2 重点を持つ特異結び目 $\}$ への制限を $U_m(W)|_m$ と記述した. 定義よりこれは自然に「 $\{m$ 個の 2 重点を持つ特異結び目 $\} /$ 辺の自己交差」からの射と見なせる. 一般に, $U_m(W)|_m$ から $U_m(W)$ を構成する計算はとても煩雑になる.) すなわち, 以下の射が矛盾なく定まる.

$$U_m: \mathcal{G}_m \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{F}_m \mathcal{V} / \mathcal{F}_{m-1} \mathcal{V}$$

W_m は定義から $\mathcal{F}_m \mathcal{V} / \mathcal{F}_{m-1} \mathcal{V}$ からの射と見えて, W_m と U_m は互いに逆写像となる.

一般に Vassiliev 不変量はその重み系から決定することはできないが, 量子不変量や Alexander 不変量に出てくる係数については重み系で完全に特徴付ける方法がある. よって定理 5.3 の証明は重み計のレベルで行えば十分ということになる. 次はこのことについて理論の概略を説明する.

5.6 Canonical Vassiliev invariants

任意の m 次の重み系は $m-1$ 次の Vassiliev 不変量を法とした m 次の Vassiliev 不変量から定まる. すなわち,

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{m-1} \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}_m \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}_m \mathcal{W} \rightarrow 0 \tag{5.4}$$

は完全系列である. この事実は, 切断 $\mathcal{G}_m \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{F}_m \mathcal{V}$ を構成することで証明ができる.

事実から天下りのにいうと、もっと強く、 \mathcal{A}^r の階数に関する完備化 $\varprojlim_m \mathcal{A}^r / \mathcal{G}_m \mathcal{A}^r$ に値をもつある 自然な 絡み目不変量 $\mathbf{Z}^{\mathbf{K}}$ (cf. [7, 8, 4, 5, 9, 11, 12]) が存在して、次の性質を満たす。

(性質) $V_m: \mathcal{G}_m \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{F}_m \mathcal{V}$ を、次数 m の重み系 W にたいして

$$V_m(W) = W \circ \mathbf{Z}^{\mathbf{K}}$$

と定めるとこれが (5.4) の切断となる。

定義 5.4. 次数 m の Vassiliev 不変量 V が **canonical** であるとは、 V が $\mathbf{Z}^{\mathbf{K}}$ から定まる切断の像となることをいう。すなわち、

$$V = W_m(V) \circ \mathbf{Z}^{\mathbf{K}}$$

となることである。

定義 5.5. h を形式的不定元とする。次の形の元 V を **Vassiliev 級数** と呼ぶ。

$$V \in \sum_{m=0}^{\infty} (\mathcal{F}_m \mathcal{V}) h^m$$

すなわち、 $V = V_0 + V_1 h + \dots +$ という絡み目不変量で、各 V_m が m 次の Vassiliev 不変量となるようなものである。

Vassiliev 級数 V に対する重み系 $W(V)$ をすべての m に関する V_m の重み系の和と定める。すなわち

$$W(V) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m(V_m).$$

ここで $W(V)$ は \mathcal{W} の階数に関する完備化 $\varprojlim_m \mathcal{W}^r / \mathcal{G}_m \mathcal{W}^r$ の元である。

定義 5.6. Vassiliev 級数 $V = \sum V_m h^m$ が **canonical** であるとは、各 V_m が **canonical** であることをいう。すなわち h^{\deg} を m 次のコード図に h^m をかけるという射象として、 $\mathbf{Z}_h^{\mathbf{K}} = h^{\deg} \circ \mathbf{Z}^{\mathbf{K}}$ としたとき

$$V = W(V) \circ \mathbf{Z}_h^{\mathbf{K}}$$

となることである。

定義より、2つの **canonical** な Vassiliev 級数が等しいこととその重み系が等しいことは同値である。すなわち、**canonical** な Vassiliev 級数はその重み系で特徴付けられる。また次の命題により、**canonical** な Vassiliev 級数の積^{*4}はその因子の重み系で特徴付けられることがわかる。

命題 5.7. 2つの Vassiliev 級数の積はまた Vassiliev 級数であり、2つの Vassiliev 級数の積の重み系はそれぞれの重み系の積となる。また、**canonical** な Vassiliev 級数の積はまた **canonical** な Vassiliev 級数である。

いくつか例を挙げてみる ($\mathbf{Z}^{\mathbf{K}}$ の定義はこの報告書ではしないので少し乱暴ですが・・・)。

例 5.8. すべての結び目に対して 1 となる不変量は 0 次の **canonical** な Vassiliev 不変量で、重み系 ε は次で与えられる。

$$\varepsilon(D) = \begin{cases} 1 & D \text{ はコードを持たない円周} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

例 5.9. $\hat{J}_{sl_2, d}$ は **canonical** な Vassiliev 級数である。

^{*4} 可換環に値を持つ絡み目不変量 V, V' と絡み目 L に対して $(V \cdot V')(L) = V(L)V'(L)$ と定める。

例 5.10. 次で定義される不変量 (HOMFLY 多項式) は canonical な Vassiliev 級数である .

$$\begin{aligned} H_{c\text{-component unlink}} &= \left(\frac{e^{Nh/2} - e^{-Nh/2}}{e^{h/2} - e^{-h/2}} \right)^c \\ e^{Nh/2} H_{L_+} - e^{-Nh/2} H_{L_-} &= (e^{h/2} - e^{-h/2}) H_{L_0} \end{aligned}$$

ただし $e^x = \exp x$ とおき, L_+, L_-, L_0 は任意の Conway triple (図 16) とした .

HOMFLY 多項式を N で割って $N \rightarrow 0$ したものを \tilde{C} とすると, 次が成り立つ .

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{c\text{-component unlink}} &= \begin{cases} \frac{h}{e^{h/2} - e^{-h/2}} & c = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \\ \tilde{C}_{L_+} - \tilde{C}_{L_-} &= (e^{h/2} - e^{-h/2}) \tilde{C}_{L_0} \end{aligned}$$

このとき任意の絡み目 L に対して

$$\tilde{C}_L(h) = \frac{h}{e^{h/2} - e^{-h/2}} C_L(e^h)$$

となることがわかる (C_L は Conway 多項式; 5.3 節参照). すなわち, Conway 多項式は canonical な Vassiliev 級数ではないが, $\frac{h}{e^{h/2} - e^{-h/2}}$ をかけて $t = e^h$ すると canonical な Vassiliev 級数になるということである .

以上の例を踏まえて, 定理 5.3 を以下のように canonical な Vassiliev 級数を用いて書き直す . (定理 5.3 の式 (5.1) においては, 左辺の商 $[d]$ が h に依るので $a_{j,m}$ や MM が canonical でなくなる .)

定理 5.11. 枠の付いていない結び目 K の色付き Jones 多項式 $\hat{J}_{sl_2, V_d}(K) \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ を d と h に関して次のように展開する .

$$\frac{\hat{J}_{sl_2, V_d}(K)|_{q=\exp h}}{d} = \sum_{j,m \geq 0} b_{j,m}(K) \lambda^j h^m \quad (5.5)$$

ただし $\lambda = d - 1$ とおいた . また ,

$$JJ(K)(h) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{m,m}(K) h^m$$

とおく . このとき次が成り立つ .

- (1) $j > m$ のとき $b_{j,m}(K) = 0$
- (2) $JJ(K)(h) \cdot \frac{h}{e^{h/2} - e^{-h/2}} C_K(e^h) = 1$

定理 5.3 と定理 5.11 の同値性の証明. (1) は明らか . $b'_{j,m}$ を \hat{J}/d の $d^j h^m$ の係数とする . 係数を合わせると次が成り立つ .

$$\sum a_{j,m} d^j h^m = \frac{\hat{J}}{[d]} = \frac{d}{[d]} \cdot \frac{\hat{J}}{d} = \frac{e^{h/2} - e^{-h/2}}{h} \cdot \frac{dh}{e^{dh/2} - e^{-dh/2}} \cdot \sum b'_{j,m} d^j h^m$$

が成り立つ . $\frac{e^{h/2} - e^{-h/2}}{h}$ は $1 + (h)$ の形をしていて, (h) の項は h の次数を上げるが, (1) により対角成分の係数には影響しない . よって次が成り立つ .

$$\sum a_{m,m} d^m h^m = \frac{dh}{e^{dh/2} - e^{-dh/2}} \cdot \sum b'_{m,m} d^m h^m$$

$d = 1$ のところでは次が成り立つ .

$$MM = \frac{h}{e^{h/2} - e^{-h/2}} \cdot JJ$$

あとは両者を比べれば同値性が従う .

□

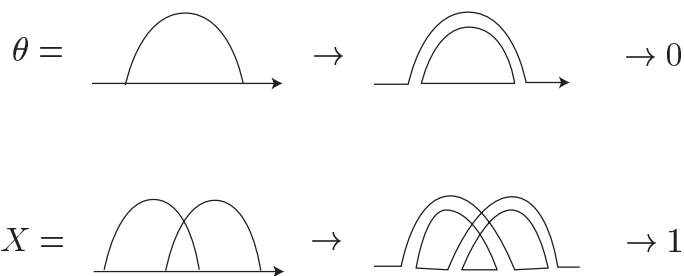


図 20 θ と X の動き

ここまでの議論により，定理 5.11 の (2) を示すためには，次の命題を示せば十分である．

命題 5.12. W_{JJ}, W_C をそれぞれ JJ, \tilde{C} の canonical Vassiliev 級数としての重み系としたとき，

$$W_{JJ} \cdot W_C = \varepsilon$$

が成り立つ．

5.7 Conway 多項式の重み系

この節では W_C を調べる．各主張の証明は概略にとどめる． \tilde{C} のスケイン関係式は W_C のレベルでは次のように表される．

$$W_C(\text{---} \curvearrowright \text{---}) = W_C(\text{---} \curvearrowleft \text{---}),$$

$$W_C(c \text{ cycles}) = \begin{cases} 1 & c = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

図 20 をみてほしい． m_1 個の θ と m_2 個の X からなるコード図を (m_1, m_2) -caravan と呼ぶ．(たくさんある．) このとき上の関係式から次のことがすぐに従う．

$$W_C((m_1, m_2)\text{-caravan}) = \begin{cases} 1 & m_1 = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{5.6}$$

また，少し考えると W_C は次の 2 つの関係式 $2T', 2T''$ も満たすことがわかる．

$$2T' : W\left(\cdots \overset{l}{\curvearrowright} \cdots \ominus \cdots \overset{r}{\curvearrowright} \cdots \right) = W\left(\cdots \overset{l}{\curvearrowright} \cdots \overset{r}{\curvearrowright} \cdots \ominus \cdots \right)$$

$$2T'' : W\left(\cdots \overset{l}{\curvearrowright} \cdots \ominus \cdots \overset{r}{\curvearrowright} \cdots \right) = W\left(\cdots \overset{l}{\curvearrowright} \cdots \cdots \ominus \overset{r}{\curvearrowright} \cdots \right)$$

ただし，上の図で \ominus はその部分には他のコードがないという印で，また l の r に近くないほうの端はどこにあってもよいこととする． $\mathcal{G}_d \mathcal{D}$ を次数 m のコード図の集合とする．もっと強く，次の命題が従う．

命題 5.13. $W : \mathcal{G}_m \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}$ が任意の $m_1, m_2 \geq 0$ に対する関係式 (5.6) と関係式 $2T', 2T''$ を満たすならば， W は重み系として拡張できて， $W = W_C$ が従う．

証明の概略. 関係式 $2T', 2T''$ により，任意のコード図がある $m_1, m_2 \geq 0$ に対して (m_1, m_2) -caravan となることを示せばよい． □

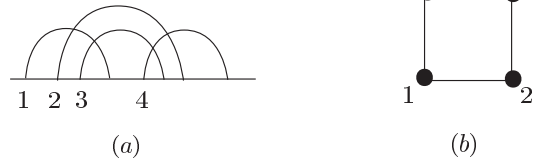


図 21 (a) コード図 D (b) D に対するラベル付き交差グラフ $LIG(D)$

ここからは重み系をコード図から定まる行列の行列式で表す方法を紹介する .

定義 5.14. 次数 m のコード図 D のラベル付き交差グラフ $LIG(D)$ とは, D の左から右に順序つけられたコードを順序つけられた頂点にもち, i, j 番目のコードが交わっている時にはそれらに対応する頂点を辺でつなく, として得られる空間グラフとする (例: 図 21). D の交差行列 $IM(D)$ とは, 各成分が

$$IM(D)_{i,j} = \begin{cases} \text{sign}(i-j) & i \text{ 番目と } j \text{ 番目のコードが交わる時} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定まる $m \times m$ 行列とする . 例えば図 21 (a) のコード図 D に対して $IM(D)$ は次のようになる .

$$IM(D) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 5.15.

$$W_C(D) = \det IM(D)$$

証明の概略. 命題 5.13 より, $\det IM: \mathcal{G}_d D \rightarrow \mathbb{Z}$ が関係式 (5.6) と関係式 $2T', 2T''$ を満たすことを見ればよい . □

コード図 D に対して, $IM(D) = (a_{i,j})_{i,j}$ の行列式を置換符号とエントリーの積の和として展開する .

$$\det IM(D) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^m a_{i,\sigma(i)} \quad (5.7)$$

添え字 i と $\sigma(i)$ に対応するコードが交差していない場合は $a_{i,\sigma(i)} = 0$ より, それらが交差している置換のみを考える . それはちょうど $LIG(D)$ の頂点集合を長さ 1 以上の向きの付いた cycle で分割をして, その上をなぞることによって実現される . 例えば図 21 (b) で, 1 つの大きな cycle: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ は置換 $(1, 2, 3, 4) \mapsto (2, 4, 1, 3)$ に対応し, 2 つの cycle: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ は置換 $(1, 2, 3, 4) \mapsto (2, 1, 4, 3)$ に対応する .

定義 5.16. コード図 D に対して, $LIG(D)$ の Hamilton cycle を, $LIG(D)$ のなかの長さが 1 より大きい向きの付いた cycle で, 同じ頂点は 2 回以上通らないようなものとする . Hamilton cycle H に対して, 降下 $d(H)$ を, ラベルが減る回数とする . 例えば $H = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow^* 3 \rightarrow^* 1$ ならば $d(H) = 2$ となる . $LIG(D)$ の cycle 分割 $H = \cup H_\alpha$ とは, 頂点集合を覆う Hamilton cycle H_α の交わりを持たない集合のこととする . cycle 分割 $H = \cup H_\alpha$ に対して, 降下 $d(H)$ を $d(H) = \sum d(H_\alpha)$ とする .

すると (5.7) から

$$W_C(D) = \sum_{H = \cup H_\alpha} \text{sign}(\sigma_H) (-1)^{d(H)}$$

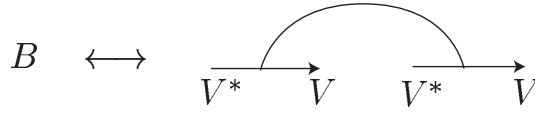


図 22 B の模式図

が従う．ここで σ_H は cycle 分割 H の表す置換とした．もし cycle 分割 H が奇数の長さの cycle をもつとすると、向きをかえる操作で $(-1)^{d(H)}$ の符号は逆になり、 $\text{sign}(\sigma_H)$ はそのままなので、全体では打ち消しあう．よって、cycle 分割 H は奇数の長さの cycle をもたないものに制限できる．このとき $|H|$ を cycle の数として $\text{sign}(\sigma_H) = (-1)^{|H|}$ が成り立つため、次の式が従う．

$$W_C(D) = \sum_{H=\cup H_\alpha: \text{奇数の長さの cycle を持たない}} (-1)^{|H|} (-1)^{d(H)} \quad (5.8)$$

2 つの重み系 W_1, W_2 の代数構造には次で代数構造が入っていた．

$$(W_1 \cdot W_2)(D) = \sum_{\substack{\text{分解} \\ D=D_1 \cup D_2}} W_1(D_1) \cdot W_2(D_2)$$

そこで重み系 W の指数展開式を考えると

$$(\exp W)(D) = \sum_{\substack{\text{順序付けない分解} \\ D=\cup D_\alpha}} \prod_{\alpha} W(D_\alpha)$$

となり、仮に W が D の $\text{LIG}(D)$ の形にのみ依存する場合は

$$(\exp W)(D) = \sum_{\substack{\text{順序付けない分解} \\ \text{LIG}(D)=\cup G_\alpha}} \prod_{\alpha} W(G_\alpha) \quad (5.9)$$

と表すことができる．ただしラベル付きグラフの分解はコード図の分解に対応させて定義する．

命題 5.17.

$$(\log W_C)(D) = - \sum_H (-1)^{d(H)}$$

ただし、ここでの和は cycle 分解 H で成分数が 1 のものとする．

証明の概略. $W(D) = - \sum_H (-1)^{d(H)}$ とおく．定義により明らかに W は D の $\text{LIG}(D)$ の形にのみ依存する．よって (5.9) を用いて W の指数展開をして (5.8) の右辺と比べればよい． \square

5.8 リー環と重み系

始めにリー環との重み系について一般的な背景を概説する． \mathfrak{g} を体 \mathbb{F} 上の有限次元リー環とし、 t を \mathfrak{g} 上の非退化な不変形式 (ad-invariant symmetric bilinear form) とする． V を \mathfrak{g} の表現とする．これだけの情報から次のように重み系を定義することができる (cf. [2, 3])． \mathfrak{g} の基底 $\{\mathfrak{g}_a\}_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ とおく． $t_{ab} = t(\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b)$ とおき、 $T = (t_{ab})_{a,b}$ とおく． $T^{-1} = (t^{ab})_{a,b}$ を T の逆行列とする． $B \in (V^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes V) = \text{End}(V \otimes V)$ を $B = \sum_{a,b=1}^{\dim \mathfrak{g}} t^{ab} \mathfrak{g}_a \otimes \mathfrak{g}_b$ で定義し、形式的に図 22 のように表す．これを用いて、次数 m のコード図 D から $T(D) \in \text{End}(V)$ を図 23 のように定義する．(詳しい定義は省略する．)

$T(D)$ は \mathfrak{g} の基底の取り方によらない \mathfrak{g} -加群の射で、 $D \mapsto \text{tr} T(D)$ は関係式 (5.2) を満たす (cf. [2, 3])．従って $\text{tr} T(D)$ は A からの射と見えて、それを $W_{\mathfrak{g}, V}: A \rightarrow \mathbb{F}$ とかく (t に依存するが省略する)．

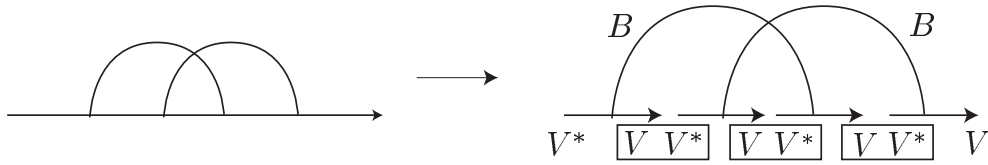


図 23 $T \in V^* \otimes V = \text{End}(V)$ の構成方法 ; 囲まれた V と V^* は縮約を表す

本稿では定義しないが、単純リー代数 \mathfrak{g} と $U_h(\mathfrak{g})$ の有限次元表現 W_1, \dots, W_n に対しても sl_2 の場合と類似の方法で枠付き絡み目 (resp. 枠の付いていない絡み目) $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ の不変量 $J_{\mathfrak{g}, W_1, \dots, W_n}(L)$ (resp. $\hat{J}_{\mathfrak{g}, W_1, \dots, W_n}(L)$) が定義できる .

命題 5.18. $J_{\mathfrak{g}, V}$ の (canonical Vassiliev 級数としての) 重み系は $W_{\mathfrak{g}, V}$ である*5 .

次に $W_{\mathfrak{g}, V}$ を枠に依存しないように補正する . 仮に V が有限次元既約表現で C をカシミール数 $W_{\mathfrak{g}, V}(\text{---})/W_{\mathfrak{g}, V}(\text{---})$ とすると次が関係式 (5.3) を満たし A^r からの射として定義できる .

$$\hat{W}_{\mathfrak{g}, V} = W_{\mathfrak{g} \oplus u(1), \hat{V}}$$

ただし $\sqrt{-C}$ を 1 次元リー代数 $u(1)$ の 1 次元表現で生成元 a を $\sqrt{-C} \cdot a$ にするものとしたとき, $\hat{V} = V \otimes \sqrt{-C}$ とおいた . V と \hat{V} は線形空間としては同型であり, $\hat{W}_{\mathfrak{g}, V}(D)$ は図 23 の方法で B を $\hat{B} = B - C \cdot I$ に置きかえて計算する射のトレースと一致する .

命題 5.19. $\hat{J}_{\mathfrak{g}, V}$ の (canonical Vassiliev 級数としての) 重み系は $\hat{W}_{\mathfrak{g}, V}$ である .

ここからは特に $\mathfrak{g} = sl_2$ の場合を考える . リー代数 sl_2 の基底を次のようにとる .

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

sl_2 の d 次元既約表現 V_d の基底 v_0, \dots, v_λ を, 任意の k に対して次を満たすようにとる . $\lambda = d - 1$ とおく .

$$\begin{aligned} H v_k &= (\lambda - 2k)v_k \\ E v_k &= (\lambda - k + 1)v_{k-1} \\ F v_k &= (k + 1)v_{k+1} \end{aligned}$$

ただし $i \neq 0, \dots, \lambda$ のとき $v_i = 0$ とする . sl_2 の非退化な標準不変形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle: sl_2 \otimes sl_2 \rightarrow \mathbf{F}$, $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY)$ に対して

$$\langle H, H \rangle / 2 = \langle E, F \rangle = 1$$

が成り立ち, 従って \hat{B} は次で定義される .

$$\hat{B} = E \otimes F + F \otimes E + \frac{1}{2} H \otimes H - C \cdot I$$

ただし C は V_d に付随したカシミール数 $C = \lambda(\lambda + 2)/2$. 計算により次が従う .

$$\hat{B}(v_k \otimes v_{k'}) = \lambda(B^+ + B^- + I)(v_k \otimes v_{k'}) + (\lambda \text{ の次数 } 0 \text{ の項}) \tag{5.10}$$

ただし B^+, B^- は次のようにおいた .

$$\begin{aligned} B^+ &= \sum_{\epsilon=0,1} (-1)^\epsilon B_\epsilon^+; & B_\epsilon^+(v_k \otimes v_{k'}) &= -(k+1)v_{k+\epsilon} \otimes v_{k'-\epsilon} \\ B^- &= \sum_{\epsilon=0,1} (-1)^\epsilon B_\epsilon^-; & B_\epsilon^-(v_k \otimes v_{k'}) &= -(k+1)v_{k-\epsilon} \otimes v_{k'+\epsilon} \end{aligned}$$

*5 非退化な標準不変形式 t に付随したもの .

ここまでで定理 5.11 の前半 (1) が証明できる .

定理 5.11(1) の証明. (5.10) により, \hat{B} が λ について高々 1 次なので, 次数 m のコード図 D に対して $T(D)$ は λ について高々 m 次である . トレースを取る操作で $\lambda + 1$ がかかるが, それは (5.5) の左辺の商で打ち消される . canonical Vassiliev 級数とその重み系の次数は対応するから主張が従う . \square

JJ は h^m の係数の中でも λ の最高次の係数のみを見ているから, 次数 m のコード図 D に対して $W_{JJ}(D)$ を計算するためには, \hat{B} の λ の係数である $B^+ + B^- + I$ のみを考えれば十分である . $T_{JJ}(D)$ を B の代わりに $B^+ + B^- + I$ を使って $T(D)$ のときと同様に定義する . このとき $T_{JJ}(D) = W_{JJ}(D)I$. 同様にして, $T'_{JJ}(D)$ を $B^+ + B^-$ を使って定義する . $W'_{JJ}(D)I = T'_{JJ}(D)$ として $W'_{JJ}(D)$ を定義する . このとき重み系の等式として $W_{JJ} = W'_{JJ} \cdot W_1$ が成り立つ . W_1 はすべてのコード図に対して 1 を返す重み系とした .

D を m 次のコード図とし, $(C_\gamma)_{\gamma=1}^m$ を左から右に順序の付いた D のコードの集合とする . $0 \leq k \leq \lambda$ に対して $T'_{JJ}(D)v_k$ は次のように計算できる .

- (1) D のコードに, $\{B_0^+, B_1^+, B_0^-, B_1^-\}$ の選び方に対応した記号 $s(\gamma) \in \{+, -\}$ と数 $\epsilon(\gamma) \in \{0, 1\}$ をマークする . (4^m 通り .)
- (2) 各 (s, ϵ) に対して次のように定まる項を足しあげる . マークされたコード図 $D^{s, \epsilon}$ に対して, v_k を左から右へ通らせる . $D^{s, \epsilon}$ の各頂点は, それにつながっているコード C_γ のマークから, 次のようにして定まる作用素と思える . まず $\epsilon(\gamma)$ を添え字 k に足し, s と ϵ に対応した $\{B_0^+, B_1^+, B_0^-, B_1^-\}$ にあわせて 1 か $-(k+1)$ をかける . v_k にすべてのコードを作用させ, (s, ϵ) に対して足しあげた結果が $T'_{JJ}(D)v_k$ となる .

この操作を厳密にかくために, いくつか用語を定義する . まず D の頂点に左から右に $1, \dots, 2m$ と数を付ける . i_γ^+ (resp. i_γ^-) を C_γ の左 (resp. 右) の頂点に付けた数とする . C_γ の領域 $\text{dom}C_\gamma$ を次で定義する .

$$\text{dom}C_\gamma = (i_\gamma^+ i_\gamma^-) = \{i \in \mathbb{N} : i_\gamma^+ \leq i < i_\gamma^-\}$$

$k(i)$ を, v_k が i 番目の頂点を通る直前の添え字の数とする . このとき次が成り立つ .

$$k(i) = k(1) + \sum_{\{\gamma: i \in \text{dom}C_\gamma\}} s(\gamma)\epsilon(\gamma)$$

この記号を用いると, 先ほどの計算方法 (1), (2) から次の式が従う .

$$W'_{JJ}(D) = (-1)^m \sum_{\substack{s \in \{+, -\}^m \\ \epsilon \in \{0, 1\}^m}} \prod_{\gamma=1}^m (-1)^{\epsilon(\gamma)} (1 + k(i_\gamma^{s(\gamma)}))$$

$\epsilon(\gamma)$ に関する多項式 P のに微分作用素 $\frac{\delta P}{\delta \epsilon(\gamma)}$, $\gamma = 1, \dots, m$, を次で定める .

$$\frac{\delta P}{\delta \epsilon(\gamma)} = P|_{\epsilon(\gamma)=1} - P|_{\epsilon(\gamma)=0}$$

この定義を用いると, 次の式が従う .

$$W'_{JJ}(D) = (-1)^m \sum_{s \in \{+, -\}^m} \left(\prod_{\gamma=1}^m \frac{\delta}{\delta \epsilon(\gamma)} \right) \left(\prod_{\gamma=1}^m (1 + k(1) + \sum_{\{\beta: i_\gamma^{s(\beta)} \in \text{dom}C_\beta\}} s(\beta)\epsilon(\beta)) \right)$$

上の式は m 変数多項式の m 階偏微分と思えて, Taylor の定理の類似により結果は次の式の $\epsilon(1) \cdots \epsilon(m)$ の係数と等しくなる .

$$(-1)^m \sum_{s \in \{+, -\}^m} \prod_{\gamma=1}^m \left(1 + k(1) + \sum_{\{\beta: i_\gamma^{s(\beta)} \in \text{dom}C_\beta\}} s(\beta)\epsilon(\beta) \right)$$

$\gamma = 1, \dots, m$ の積のなかでは高々 1 つの $\epsilon(\beta)$ しか拾ってこれられないため, その係数はそれら γ のなかでの $\epsilon(\beta)$ の選び方の組み合わせの数になる. すなわち

$$W'_{JJ}(D) = (-1)^m \sum_{s \in \{+, -\}^m} \sum_{\{\varrho \in \mathfrak{S}_m : \forall \gamma \ i_{\gamma}^{s(\gamma)} \in \text{dom} C_{\varrho(\gamma)}\}} \prod_{\gamma=1}^m s(\varrho(\gamma)).$$

仮に与えられた γ に対して i_{γ}^{+} と i_{γ}^{-} が共に $\text{dom} C_{\varrho(\gamma)}$ に入るとすると, $s(\gamma) = +$ と $s(\gamma) = -$ の項が打ち消しあうので, そのようなことがないような ϱ に制限することができる. 言い換えればこの場合, 任意の ϱ に対して $\forall \gamma \ i_{\gamma}^{s(\gamma)} \in \text{dom} C_{\varrho(\gamma)}$ を満たす s は一意に定まる. この s に対する $s(\gamma)$ を $s(\varrho, \gamma)$ とかくことにする. このとき次が成り立つ.

$$W'_{JJ}(D) = \sum_{\{\varrho \in \mathfrak{S}_m : \forall \gamma \ C_{\gamma} \text{ は } C_{\varrho(\gamma)} \text{ 自身もしくは } C_{\varrho(\gamma)} \text{ と交わる}\}} \prod_{\gamma=1}^m (-s(\varrho, \gamma))$$

$\gamma = \varrho(\gamma)$ となるときは $s(\gamma) = (+)$ より $s(\varrho, \gamma) = (+)$. これは「 C_{γ} は $C_{\varrho(\gamma)}$ 自身」の項を W_1 でおきかえられることを意味するため, 最終的に次の等式を得る.

$$W_{JJ}(D) = \sum_{\{\varrho \in \mathfrak{S}_m : \forall \gamma \ C_{\gamma} \text{ は } C_{\varrho(\gamma)} \text{ と交わる}\}} \prod_{\gamma=1}^m (-s(\varrho, \gamma))$$

この等式を言い換えると次の命題が従う.

命題 5.20.

$$W_{JJ}(D) = \text{perIM}(D)$$

ただし正方行列 $A = (a_{ij})_{ij=0}^m$ に対して $\text{per} A = \sum_{\varrho \in \mathfrak{S}(m)} \prod_{i=1}^m a_{i\varrho(i)}$ とおいた.

$\text{perIM}(D)$ を定義に従って計算すると次を得る.

$$W_{JJ}(D) = \sum_{H = \cup_{\alpha} H_{\alpha}} (-1)^{d(H)} \quad (5.11)$$

命題 5.21.

$$(\log W_{JJ})(D) = \sum_H (-1)^{d(H)}$$

ここでの和は $\text{LIG}(D)$ の cycle 分解 H で成分数が 1 のものとする.

証明. 命題 5.17 の証明と同様に, $W(D) = \sum_H (-1)^{d(H)}$ とおく. 定義により明らかに W は D の $\text{LIG}(D)$ の形にのみ依存する. よって (5.9) を用いて W の指数展開をして (5.11) の右辺と比べればよい. \square

命題 5.12 の証明. 命題 5.17, 5.21 より次が従う.

$$\log W_C + \log W_{JJ} = 0$$

これはすなわち $W_C \cdot W_{JJ} = \epsilon$ を意味する. \square

謝辞

第 4 回琵琶湖若手数学者勉強会を企画・運営していただき, 私達を参加させてくださいました幹事の森伸吾さんに心より感謝いたします. また, 有意義で刺激的な 4 日間を共に過ごして下さった参加者の皆様にも大変感謝いたします. ありがとうございました.

参考文献

- [1] D. Bar-Natan and S. Garoufalidis: *On the Melvin-Morton-Rozansky conjecture*, Invent. Math. **125** (1996), pp. 103-133.
- [2] D. Bar-Natan: *perturbative aspects of the Chern-Simons topological quantum field theory*, Ph.D. thesis, Princeton Univ., June 1991, Dep. of Mathematics.
- [3] ——— : *On the Vassiliev knot invariants*, Topology **34** (1995), 423–472.
- [4] ——— : *Non-associative tangles*, Georgia Inter. Topology Conference proceedings.
- [5] P. Cartier: *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevich des noeuds*, C. R. Acad. Sci. Paris **316** Serie I (1993) 1205–1210.
- [6] J. H. Conway: *An enumeration of knots and links*, Computational problems in abstract algebra, Ed. J. Leech, Pergamon Press, (1969), 329–358.
- [7] V. G. Drinfel'd: *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1991) 1419–1457.
- [8] ——— : *On quasitriangular Quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. J. **2** (1991) 829–860.
- [9] C. Kassel: *Quantum groups*, Springer-Verlag GTM **155**, Heidelberg 1994.
- [10] 河内明夫: レクチャー結び目理論, 共立出版 (2007).
- [11] M. Kontsevich: *Vassiliev's knot invariants*, Adv. in Sov. Math., **16(2)** (1993), 137–150.
- [12] T. Q. T. Le and J. Murakami: *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links*, Compo. Math. **102** (1996), 42-64.
- [13] P. M. Melvin and H. R. Morton: *The coloured Jones function*, Commun. Math. Phys. **169** (1995) 501–520.
- [14] N. Y. Reshetikhin and V. G. Turaev: *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), no. 1, 1–26.
- [15] D. Rolfsen: *Knots and Links*, Publish or Perish, Inc. (1976).