Banach-Tarski paradox とその一般化

梅本悠莉子*

大阪市立大学大学院理学研究科

この度は，第７回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました．このセミナーでは，たくさんの講演を聴くことができ，また，自身もポスター発表の機会をいただき，とても貴重な経験となりました．この場をお借りして，運営委員の方々，参加者の皆様に厚く御礼申し上げます．

Banach-Tarski paradox とは，「３次元 Euclid 空間内の，内点をもつ任意の２つの部分集合を，それぞれ同数のピースに上手に分割すると，各ピースごとには合同にできる」という定理です．([Sun]）これにより，たとえば１つのオレンジをうまく切って，再び張り合せると２つのオレンジができるということになります．本稿では，この“paradox”の仕組みと，この定理を３次元以上の Euclid 空間や球面や双曲空間に拡張するアイデアを，ポスター発表の内容をもとに述べています．なお、本稿ならびにポスターで使った図の一部は大阪市立大学数学研究所の能城敏博さんと森内博正さんに描いていただきました．両氏に感謝いたします．

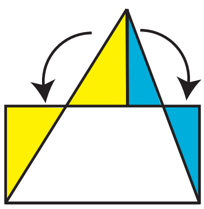
1　G-分割合同

定義 1. (G- 空間)
空でない集合 X に群 G が作用するとき，X を G-空間という. 特に G の (単位元以外の）任意の元が X に固定点を持たないとき, G は X に自由に作用するという.

例 1.
1. $\mathbb{R}^3$ は $E(3)$-空間.　ここで $E(3)$ は *Euclid* 等長変換群.
2. 原点中心の２次元球面 S^2 は $SO(3)$-空間.（$SO(3) := \{g \in M(3) | {}^t gg = I, det(g) = 1\}$ 回転群)
3. 任意の群 G 自身は G-空間.

定義 2. $(A \approx_G B)$
G-空間 X の空でない２つの部分集合 A, B が
G-分割合同（$A \approx_G B$）である.
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$　$A = {}^\exists \sqcup_{i=1}^n A_i$ (A の n 分割）,　$B = {}^\exists \sqcup_{i=1}^n B_i$（$B$ の n 分割）　${}^\exists g_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$,　s.t. $A_i = g_i B_i$.
(右図においては大きな三角形と長方形は $E(3)$-分割合同)

定義 3. $(A \ll_G B)$
G-空間 X の空でない２つの部分集合 A, B に対し，
A が B の部分集合と G-分割合同であるとき $A \ll_G B$ と書くことにする.



命題 1.　(*Bernstein*)　$A \ll_G B$, $B \ll_G A \Longrightarrow A \approx_G B$.

* yuriko.ummt.77@gmail.com

2　G-逆説的

定義 4. (G-逆説的)

G- 空間 X の空でない部分集合 E は G-逆説的
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\ {}^{\exists} B \sqcup {}^{\exists} C$ (互いに disjoint) $\subset E$ s.t. $B \approx_G E,\quad C \approx_G E$

例 2. F_2 を２つの文字 a,b から生成される自由群とすると，F_2 は F_2-逆説的.
具体的に $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ に対し，
$W(x) := \{w \in F_2 \mid w$ は x で始まる既約な語 $\}$ とすると，
$((W(a) \sqcup W(a^{-1})) \sqcup ((W(b) \sqcup W(b^{-1})) \subset F_2$
かつ $F_2 = W(a) \sqcup aW(a^{-1}) = W(b) \sqcup bW(b^{-1})$

命題 2. *X は G-空間とする.*

1. *X の空でない２つの部分集合 A, B に対し，*
   $A \approx_G B$ かつ A は G-逆説的 $\Longrightarrow$ B も G-逆説的.
2. *G の部分群 H に対し，*
   X は H-逆説的 $\Longrightarrow$ X は G-逆説的.
3. *G は G-逆説的かつ X に自由に作用する $\Longrightarrow$ X も G-逆説的.*

3　Banach-Tarski paradox への準備

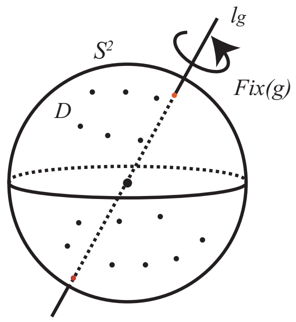
命題 3. $SO(3)$ は F_2 と同型な部分群を含む．具体的には次の行列 A, B で生成される部分群 H は F_2 と同型.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

よって例２から特に H は H-逆説的である.

系 1. $H - \{e\}$ （e は単位元）の元 g による回転軸を ℓ_g とし，$D := \bigcup_{g \in H-\{e\}} (\ell_g \cap S^2)$ とすると，（D は可算集合であり），$S^2 - D$ は $SO(3)$-逆説的.　（下図参照）

（証明）H は $S^2 - D$ に自由に作用するので，命題２の (3) と命題３より.



命題 4. $S^2 \approx_{SO(3)} S^2 - D$

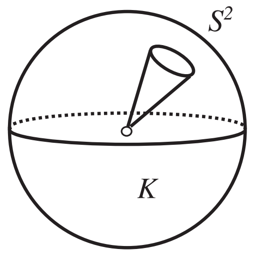
（証明）相異なる $m, n \geqq 0$ に対し $g^m(D) \cap g^n(D) = \phi$ となる $g \in SO(3)$ が存在するので，$A := \cup_{n=0}^{\infty} g^n(D)$ とすると，（A は可算集合であり），$S^2 = (S^2 - A) \sqcup A$ かつ $S^2 - D = (S^2 - A) \sqcup g(A)$.

系 2. S^2 は $SO(3)$-逆説的.

（証明）命題３の（１）と命題４より.

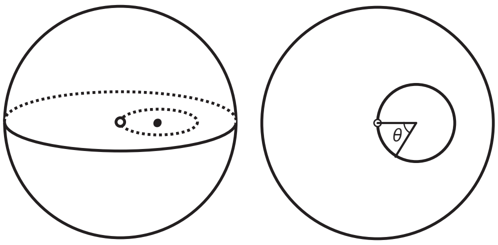
命題 5. $K \subset \mathbb{R}^3$：原点 0 中心の閉球体 $\implies K - \{0\}$ は $SO(3)$-逆説的，よって特に $E(3)$-逆説的.

（証 明）$B \subset S^2$ に対し，$B' := \{tb \mid 0 < t \leqq 1, b \in B\} \subset K - \{0\}$ と定義する（下図参照）．系 2 より．



命題 6. $K \approx_{E(3)} K - \{0\}$

（証明）簡単のため K : 単位球面，$(1/3, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ 中心で半径 $1/3$ の xy 平面上の無理数 θ 回転 $g \in E(3)$ に対し，$A := \cup_{n=0}^{\infty} g^n(\{0\})$ として命題 4 のように考えればよい (下図参照).



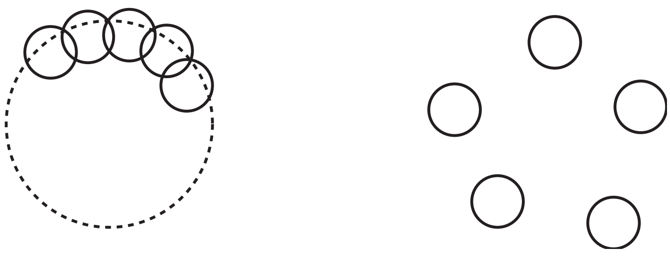
系 3. 任意の閉球体 $K \subset \mathbb{R}^3$ は $E(3)$-逆説的.

（証明）命題 2 の (1) と命題 5 より．

4 Banach-Tarski paradox

定理 1. $A, B \subset \mathbb{R}^3$：任意の閉球体 $\implies A \approx_{E(3)} B$.

（証明） $A \subset \cup_{i=1}^m g_i B \ll_{E(3)} \sqcup_{i=1}^m h_i B \ll_{E(3)} B$.（下図はイメージ）よって $A \ll_{E(3)} B$. 同様に，



$B \ll_{E(3)} A$.
命題 1 より $A \ll_{E(3)} B,\ B \ll_{E(3)} A \implies A \approx_{E(3)} B$.

系 4. *(Banach-Tarski paradox)*
$A, B \subset \mathbb{R}^3$：内点を持つ任意の有界集合 $\implies A \approx_{E(3)} B$.

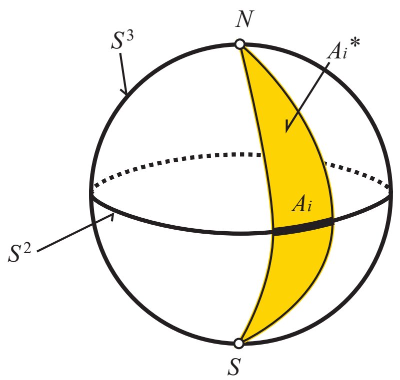
5 S^n は $SO(n+1)$-逆説的

補題 1. S^3 を3次元単位球面，$N := (0,0,0,1), S := (0,0,0,-1) \in \mathbb{R}^4$ とする．このとき $S^3 - \{N,S\}$ は $SO(4)$-逆説的.

（証明） S^2 は $SO(3)$-逆説的より
$^\exists A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_m \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n \subset S^2$, $^\exists g_1, \cdots, g_m, h_1, \cdots, h_n \in SO(3)$
s.t. $S^2 = \cup_{i=1}^m g_i A_i = \cup_{j=1}^n h_j B_j$.
$A_i^* := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in S^3 - \{N,S\} \mid \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}(x_1,x_2,x_3) \in A_i\}$
$B_j^* := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in S^3 - \{N,S\} \mid \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}(x_1,x_2,x_3) \in B_j\}$

$g_i^* := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & g_i & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h_j^* := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & h_j & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$S^3 - \{N,S\} = \cup_{i=1}^m g_i^* A_i^* = \cup_{j=1}^n h_j^* B_j^*$

（下図は イメージ）



補題 2. $S^3 \approx_{SO(4)} S^3 - \{N,S\}$.

（証明）原点中心，半 径 1 の x_3x_4 平面上の無理数 θ 回転 $g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(4)$ に対し，$A := \cup_{n=0}^\infty g^n(\{N,S\})$ として命題4および命題6のように考えればよい.

系 5. S^3 は $SO(4)$-*paradoxical*.

すると補題1の証明と同様にして今度は $S^4 - \{N,S\}$ は $SO(5)$-逆説的で，補題2の証明と同様にして $S^4 \approx_{SO(5)} S^4 - \{N,S\}$ より S^4 は $SO(5)$-逆説的となり，このようにして帰納的に次のことが言える.

系 6. 任意の $n \geqq 2$ に対し S^n は $SO(n+1)$-逆説的.

注意 1. このように任意の $n \geqq 2$ に対し S^n で球面距離を考えると *Banach-Tarski* の定理が成立する．しかし S^1 は $SO(2)$-逆説的ではないし，*Banach-Tarski* の定理も成立しない．(*[Wag]*)

6 $\mathbb{R}^n$ における Banach-Tarski paradox

さらに命題5，命題 6，系3と同様にして

補題 3. 任意の $n \geqq 3$ に対し $B^n \subset \mathbb{R}^n$: 原点0中心の閉球体 $\Longrightarrow B^n - \{0\}$ は $SO(n)$-逆説的，よって

特に $E(n)$-逆説的.

補題 4. $B^n \approx_{E(n)} B^n - \{0\}$.

系 7. 任意の閉球体 $B^n \subset \mathbb{R}^n$ は $E(n)$-逆説的.

以上から Banach-Tarski paradox の $\mathbb{R}^n$ への一般化が言える.

定理 2. （$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 3)$ における *Banach-Tarski paradox* ）
$A, B \subset \mathbb{R}^n$ *:* 任意の閉球体 $\Longrightarrow$ $A \approx_{E(n)} B$.

系 8. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *:* 内点を持つ任意の有界集合 $\Longrightarrow$ $A \approx_{E(n)} B$.

注意 2. *Euclid* 平面 $\mathbb{R}^2$ では *Banach-Tarski* の定理は成立しない.（*[Wag]*）

7 $\mathbb{H}^n$ における Banach-Tarski paradox

n-次元球体 B^n に双曲計量を入れた空間を双曲空間といい $\mathbb{H}^n$ であらわす．その向きを保つ等長変換群を $Iso(\mathbb{H}^n)$ とすると，原点 0 の固定部分群は $SO(n)$ となり，$\mathbb{R}^n$ と $E(n)$ の場合と同様に以下が成立する.

補題 5. 任意の $n \geqq 3$ に対し $B^n \subset \mathbb{H}^n$ *:* 原点 0 中心の閉球体 $\Longrightarrow B^n - \{0\}$ は $SO(n)$-逆説的，よって特に $Iso(\mathbb{H}^n)$-逆説的.

補題 6. $B^n \approx_{Iso(\mathbb{H}^n)} B^n - \{0\}$.

系 9. 任意の閉球体 $B^n \subset \mathbb{R}^n$ は $Iso(\mathbb{H}^n)$-逆説的.

定理 3. （$\mathbb{H}^n$ $(n \geqq 3)$ における *Banach-Tarski paradox* ）
$A, B \subset \mathbb{R}^n$ *:* 任意の閉球体 $\Longrightarrow$ $A \approx_{Iso(\mathbb{H}^n)} B$.

系 10. $A, B \subset \mathbb{H}^n$ *:* 内点を持つ任意の有界集合 $\Longrightarrow$ $A \approx_{Iso(\mathbb{H}^n)} B$.

注意 3. 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ でも *Banach-Tarski* の定理は成立する.（*[Myc]*）

参考文献

[Myc] J. Mycielski, *The Banach-Tarski paradox for the hyperbolic plane* Fund.Math. **132** (1989), 143–149.

[Sun] 砂田利一, 新版バナッハ・タルスキーのパラドックス, 岩波書店, (2009).

[Wag] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, (1985).