# 3 次元 AS-regular 代数の次数付き森田同値性について

上山 健太*

静岡大学大学院理学研究科

## 1　はじめに

第 7 回城崎新人セミナーに参加させていただき，ありがとうございました．大変有意義な時間を過ごすことができました．講演の機会を与えてくださった運営委員の方々に厚く御礼申し上げます．

私は非可換代数幾何学を専門に勉強しています．非可換代数幾何学とは代数幾何学の考え方や結果を用いて非可換代数を研究する分野であり，Artin-Tate-Van den Bergh が代数幾何学を用いて 3 次元 AS-regular 代数を分類したことが出発点となっています．4 次元 AS-regular 代数の分類は未だ完成しておらず，非可換代数幾何学の大きな目標として盛んに行われています．分類問題において，次数付き代数としての同型を除いて分類することが困難な場合，一つの打開策として同型より弱い条件，例えば次数付き森田同値（次数付き加群の圏としての同値）を除いて分類するということが行われます．ところが 2 つの次数付き代数が次数付き森田同値かどうかを判断することも難しい．そこで本稿では，次数付き森田同値という非可換代数的な問題に対して幾何を用いて得られた結果について述べます．

## 2　定義

この報告集では $k$ を代数的閉体とし，すべての代数は $k$ 上有限生成であると仮定する．

$A$ を次数付き代数とする．次数付き右 $A$ 加群と次数を保つ $A$ 加群準同型の圏を $\operatorname{GrMod} A$ と書く．任意の $M \in \operatorname{GrMod} A$ と各 $m \in \mathbb{Z}$ について，$M(m) \in \operatorname{GrMod} A$ は $M(m)_i = M_{m+i}$ となる次数付き右 $A$ 加群を表す．さらに任意の $M, N \in \operatorname{GrMod} A$ に対し，

$$\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N) := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_A(M, N(m)), \quad \underline{\operatorname{Ext}}^i_A(M,N) := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ext}^i_A(M, N(m))$$

と定義する．任意の $i<0$ で $A_i = 0$ かつ $A_0 = k$ のとき $A$ は連結であるという．

**定義 2.1.** $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ を連結次数付き代数とする．このとき $A$ の Gelfand-Kirillov 次元を

$$\operatorname{GKdim} A = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \dim_k \sum_{i=0}^n A_i}{\log n}$$

で定義する．

$A$ が可換代数のとき, $\operatorname{GKdim} A$ は $A$ の Krull 次元と一致する．また非可換代数 $A$ について, Gelfand-Kirillov 次元は Bergman's Gap Theorem により 0，1，2 以上の実数，または無限の値を取り，$\operatorname{GKdim} A = 0$ であることと $A$ が有限次元代数であることは同値であることが知られている．

* r0930001@ipc.shizuoka.ac.jp

次に定義する AS-regular 代数は非可換代数幾何学において中心的な役割を果たしている重要な代数の一つである.

**定義 2.2.** [1] 連結次数付き $k$ 代数 $A$ が次を満たすとき $d$ 次元 AS-regular (resp. AS-Gorenstein) 代数であるという.

- $\operatorname{gldim} A = d < \infty$ (resp. $\operatorname{id}(A) = d < \infty$ ),
- $\operatorname{GKdim} A < \infty$,
- (Gorenstein condition)

$$\underline{\operatorname{Ext}}^i_A(k, A) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq d, \\ k(l) \text{ for some } l \in \mathbb{Z} & \text{if } i = d. \end{cases}$$

可換代数 $A$ が AS-regular 代数であることと,$A$ が多項式環であることは同値なので,AS-regular 代数は多項式代数の非可換類似であるといえる.次数 1 の元で生成された 3 次元 AS-regular algebra の分類は Artin-Schelter[1] によって着手され,その後 Artin-Tate-Van den Bergh [2] により幾何的な手法で完成した.

$V$ を有限次元ベクトル空間,$T(V)$ を $V$ の $k$ 上テンソル代数とする.$R \subseteq V \otimes_k V$ を部分ベクトル空間とし,$(R)$ を $R$ で生成された $T(V)$ の両側イデアルとする.次数付き代数 $A = T(V)/(R)$ を二次代数という.つまり二次代数は生成元の次数が 1 で関係式の次数が 2 の次数付き代数である.このとき $\Gamma$ を

$$\Gamma := \{(p, q) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid f(p, q) = 0 \text{ for all } f \in R\}$$

で定義する.

**定義 2.3.** [4] $A = T(V)/(R)$ を二次代数とする.このとき,$k$ 上閉部分スキーム $E \subseteq \mathbb{P}(V^*)$ と $E$ の $k$ 上自己同型 $\sigma$ からなる幾何の組 $(E, \sigma)$ が存在して

(G1) $\Gamma = \{(p, \sigma(p)) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid p \in E\}$
(G2) $R = \{f \in V \otimes_k V \mid f(p, \sigma(p)) = 0 \text{ for all } p \in E\}$

を満たすとき $A$ は幾何的であるという.

二次代数 $A$ が条件 (G1) を満たすとき,$A$ は幾何の組 $(E, \sigma)$ を決定する.二次代数 $A$ が条件 (G2) を満たすとき,$A$ は幾何の組 $(E, \sigma)$ によって決定される.$A$ が幾何的ならば (G2) を満たすので $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ と表す.

**例 2.4.** 二次代数 $A = k\langle x, y\rangle/(f)$

$$f = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{P}^3$$

と定義する.このとき

$$\begin{aligned}
&(p, q) = \left( \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right) \in \Gamma \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\
&\Leftrightarrow f(p, q) = \alpha p_1 q_1 + \beta p_1 q_2 + \gamma p_2 q_1 + \delta p_2 q_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\beta p_1 + \delta p_2) q_2 = -(\alpha p_1 + \gamma p_2) q_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta p_1 + \delta p_2 \\ -\alpha p_1 - \gamma p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \delta \\ -\alpha & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow q = \sigma(p) \quad \text{但し } p \in \mathbb{P}^1, \sigma = \begin{pmatrix} \beta & \delta \\ -\alpha & -\gamma \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

従って $A = \mathcal{A}(\mathbb{P}^1, \sigma)$ が (G1) を満たしていることと $\det \sigma = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ が同値であることが分かる.実際,$A = \mathcal{A}(\mathbb{P}^1, \sigma)$ が幾何的であることと $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ であることは同値になっている.さらに $A$ が幾何的であることと $A$ が 2 次元 AS-regular 代数であることが同値なことが知られている.

**例 2.5.** $A$ が可換二次整域のとき，$A = \mathcal{A}(\operatorname{Proj} A, \mathrm{id})$ は幾何的である．

$A$ をネーター $d$ 次元 AS-Gorenstein 代数とし，$\mathfrak{m} := A_{\geq 1}$ を $A$ の唯一の極大斉次イデアルとする．次数付き $A$-$A$ 両側加群 $\omega_A$ を

$$\omega_A := \mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A)^* = \underline{\mathrm{Hom}}_k(\lim_{n\to\infty} \underline{\mathrm{Ext}}^d_A(A/A_{\geq n}, A), k)$$

と定義する．このとき次の事実が知られている．

**補題 2.6.** [3, Theorem 1.2] $A$ をネーター $d$ 次元 AS-Gorenstein 代数とする．このときある次数付き代数自己同型 $\nu \in \operatorname{Aut}_k A$ が存在して，次数付き $A$-$A$ 両側加群として $\omega_A \cong {}_\nu A(-l)$ となる．但し ${}_\nu A$ とは次数付きベクトル空間としての $A$ に新しく作用 $a * x * b := \nu(a)xb$ を定義した $A$-$A$ 両側加群とする．

**定義 2.7.** [5] 上記の $\nu \in \operatorname{Aut}_k A$ を $A$ の *generalized Nakayama automorphism* という．また，$\nu = \mathrm{id}_A$ のとき $A$ は対称的であるという．

AS-regular 代数は定義より AS-Gorenstein 代数であり，3 次元 AS-regular 代数はネーターであることが知られている．つまり generalized Nakayama automorphism が定義できる．

# 3　3 次元 AS-regular 代数

Artin-Tate-Van den Bergh は幾何を用いて 3 次元 AS-regular 代数を分類した．ここでは二次代数の場合の結果にのみ着目することにする．$A$ を 3 次元 AS-regular 二次代数とする．このとき $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ は幾何的であり，$E$ は $\mathbb{P}^2$ か $\mathbb{P}^2$ における次数 3 の曲線になる．これより $E$ になる可能性があるものは

1. $\mathbb{P}^2$,
2. 三角形をつくる三直線,
3. 一点で交わる三直線,
4. 二点で交わる円錐曲線と直線の和,
5. 一点で交わる円錐曲線と直線の和,
6. 二重直線と直線の和,
7. 三重直線,
8. 尖点曲線 (a cuspidal curve),
9. 結節点曲線 (a nodal curve),
10. 楕円曲線 (an elliptic curve)

がある．しかし上記全ての $E$ に対して Artin-Tate-Van den Bergh が示した条件を満たす（$\mathcal{A}(E, \sigma)$ が 3 次元 AS-regular 代数になる）ような $\sigma \in \operatorname{Aut} E$ が存在するわけではない．実際，Artin-Tate-Van den Bergh は [2, 4.13] において "generic" な 3 次元 AS-regular 二次代数を述べているが，そこには 2，4，10 の場合しか出てこない．

これを踏まえて，主結果を述べるために幾何の組 $(E, \sigma)$ に対してタイプを定義しておく．

- Type $\mathbb{P}^2$: $E$ が $\mathbb{P}^2$ であり，$\sigma \in PGL_3(k)$ のとき．
- Type $A$: $E$ が $\mathbb{P}^2$ 上の楕円曲線であり，$\sigma$ が固定点 $p \in E$ による translation automorphism のとき．
- Type $S_1$: $E$ が三角形をつくる三直線であり，$\sigma$ が三つの成分を保つとき．
- Type $S_2$: $E$ が三角形をつくる三直線であり，$\sigma$ が二つの成分を入れ替えるとき．
- Type $S_3$: $E$ が三角形をつくる三直線であり，$\sigma$ が三つの成分を巡回させるとき．
- Type $S_1'$: $E$ が二点で交わる円錐曲線と直線の和であり，$\sigma$ が各成分と二つの交点を保つとき．

- Type $S_2'$: $E$ が二点で交わる円錐曲線と直線の和であり，$\sigma$ が各成分を保ち，かつ二つの交点を入れ替えるとき．

幾何の組 $(E,\sigma)$ が Type $A$ のとき，$A=\mathcal{A}(E,\sigma)$ は 3 次元 Sklyanin 代数と呼ばれる．

# 4 主結果

$A=\mathcal{A}(E,\sigma)$ を 3 次元 AS-regular 二次代数とする．$\nu\in\mathrm{Aut}_k A$ を generalized Nakayama automorphism とするとき，その制限により $\nu\in\mathrm{Aut}_k V=\mathrm{Aut}_k A_1$ となる．従ってその双対は自己同型 $\nu^*\in\mathrm{Aut}_k\mathbb{P}(V^*)$ を導く．それだけでなく $\nu^*$ は $E$ $(\subseteq\mathbb{P}(V^*))$ 上の自己同型になっている ([5])，つまり $\nu^*\in\mathrm{Aut}_k E$.

次の定理が本稿の主定理である．

**定理 4.1.** [7] $A=\mathcal{A}(E,\sigma), A'=\mathcal{A}(E',\sigma')$ を 3 次元 AS-regular 二次代数とし，$\nu\in\mathrm{Aut}_k A, \nu'\in\mathrm{Aut}_k A'$ をそれぞれの generalized Nakayama automorphism とする．もし $(E,\sigma)$ と $(E',\sigma')$ が次の同じ Type: $\mathbb{P}^2$，$S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_1'$，$S_2'$ ならば

- $\mathrm{GrMod}\,\mathcal{A}(E,\sigma)\cong\mathrm{GrMod}\,\mathcal{A}(E',\sigma')$ ($A$ と $A'$ が次数付き森田同値)
- $\mathcal{A}(E,\nu^*\sigma^3)\cong\mathcal{A}(E',(\nu')^*(\sigma')^3)$

は同値である．

さらに，3 次元 Sklyanin 代数について次の先行する結果がある．

**定理 4.2.** [4, Theorem 5.4] $A=\mathcal{A}(E,\sigma), A'=\mathcal{A}(E',\sigma')$ を 3 次元 Sklyanin algebra とする．このとき $\sigma^9,\sigma'^9\neq\mathrm{id}$ ならば

1. $\mathrm{GrMod}\,\mathcal{A}(E,\sigma)\cong\mathrm{GrMod}\,\mathcal{A}(E',\sigma')$.
2. $\mathcal{A}(E,\sigma^3)\cong\mathcal{A}(E',\sigma'^3)$

は同値である．

さらに 3 次元 Sklyanin 代数の generalized Nakayama automorphism は $\mathrm{id}_A$ である（[6, Example 10.1]）．従って $\sigma^9,\sigma'^9\neq\mathrm{id}$ である 3 次元 Sklyanin algebra $A=\mathcal{A}(E,\sigma), A'=\mathcal{A}(E',\sigma')$ に対して定理 4.1 が成立することが分かる．

定理 4.1 によって 3 次元 AS-regular 二次代数の次数付き森田同値はある幾何的代数の同型で判断できる．

**例 4.3.** 二次代数 $A$ を

$$A=k\langle x,y,z\rangle/(yz-\alpha zy,\ zx-\beta xz,\ xy-\gamma yx) \qquad (\alpha\beta\gamma\neq 0,1)$$

で定義する．このとき $A=\mathcal{A}(E,\sigma)$ は 3 次元 AS-regular 二次代数である．ここで

$$E=l_1\cup l_2\cup l_3 \quad 但し, l_1=\mathcal{V}(x), l_2=\mathcal{V}(y), l_3=\mathcal{V}(z)$$

であり，$\sigma\in\mathrm{Aut}_k E$ は

$$\begin{aligned}\sigma|_{l_1}(0,b,c)&=(0,b,\alpha c)\\ \sigma|_{l_2}(a,0,c)&=(\beta a,0,c)\\ \sigma|_{l_3}(a,b,0)&=(a,\gamma b,0)\end{aligned}$$

で与えられる．つまり $(E,\sigma)$ は Type $S_1$ である．

このとき，$A$ の generalized Nakayama automorphism から導かれる $\nu^* \in \mathrm{Aut}_k E$ は

$$\nu^*(a,b,c) = ((\beta/\gamma)a, (\gamma/\alpha)b, (\alpha/\beta)c)\,. \tag{4.1}$$

で与えられる．これより $\nu^*\sigma^3 \in \mathrm{Aut}_k E$ は

$$\nu^*\sigma^3|_{l_1}(0,b,c) = (0,b,\alpha\beta\gamma c)$$
$$\nu^*\sigma^3|_{l_2}(a,0,c) = (\alpha\beta\gamma a,0,c)$$
$$\nu^*\sigma^3|_{l_3}(a,b,0) = (a,\alpha\beta\gamma b,0)$$

となるので，

$$B = \mathcal{A}(E,\nu^*\sigma^3) = k\langle x,y,z\rangle/(yz-\alpha\beta\gamma zy,\ zx-\alpha\beta\gamma xz,\ xy-\alpha\beta\gamma yx)$$

となる．

同様に，二次代数 $A' = \mathcal{A}(E',\sigma')$ を

$$A' = k\langle x,y,z\rangle/(yz-\alpha' zy,\ zx-\beta' xz,\ xy-\gamma' yx) \qquad (\alpha'\beta'\gamma' \neq 0,1)$$

で定義する．すると $B'$ は

$$B' = \mathcal{A}(E',(\nu')^*(\sigma')^3) = k\langle x,y,z\rangle/(yz-\alpha'\beta'\gamma' zy,\ zx-\alpha'\beta'\gamma' xz,\ xy-\alpha'\beta'\gamma' yx)$$

となる．

定理 4.1 により

$$\mathrm{GrMod}\,A \cong \mathrm{GrMod}\,A' \Longleftrightarrow B \cong B'$$

と分かる．さらに [8, Lemma 2.1] より，

$$B \cong B' \Longleftrightarrow \alpha'\beta'\gamma' = (\alpha\beta\gamma)^{\pm 1}$$

と分かる．従って

$$\mathrm{GrMod}\,A \cong \mathrm{GrMod}\,A' \Longleftrightarrow (\alpha\beta\gamma)^{\pm 1}$$

が得られる．

**定理 4.4.** [7] $A = \mathcal{A}(E,\sigma)$ を 3 次元 AS-regular 二次代数とし，$\nu \in \mathrm{Aut}_k A$ を generalized Nakayama automorphism とする．$(E,\sigma)$ が次の Type: $\mathbb{P}^2$，$S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_1'$，$S_2'$ ならば $B = \mathcal{A}(E,\nu^*\sigma^3)$ は対称的である．

つまり 3 次元 AS-regular 二次代数の次数付き森田同値は対称的な幾何的代数の同型で判断できるということである．

**例 4.5.** 例 4.3 において

$$B = \mathcal{A}(E,\nu^*\sigma^3) = k\langle x,y,z\rangle/(yz-\alpha\beta\gamma zy,\ zx-\alpha\beta\gamma xz,\ xy-\alpha\beta\gamma yx)$$

であった．簡単のために $(\alpha\beta\gamma)^3 \neq 1$ としておくと，$(E,\nu^*\sigma^3)$ は Type $S_1$ になる．このとき (4.1) より，$B$ の generalized Nakayama automorphism $\nu_B$ から導かれる $\nu_B^* \in \mathrm{Aut}_k E$ は

$$\nu_B^*(a,b,c) = \big((\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma)^{-1}a, (\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma)^{-1}b, (\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma)^{-1}c\big) = (a,b,c)$$

となり，$\nu_B^* = \mathrm{id} \in \mathrm{Aut}_k E$ と分かる．実際 $\nu_B^* \in \mathrm{Aut}_k V^*$ も id で与えられて，これは $\nu_B = \mathrm{id}_B \in \mathrm{Aut}_k B$ と同値であり，従って $B$ は対称的である．同様に $(\alpha\beta\gamma)^3 = 1$ でも $B$ は対称的になっている．

## 参考文献


[1] M. Artin and W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. Math.* **66** (1987), 171-216.

[2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, *The Grothendieck Festschrift* Vol. **1** Birkhauser, (1990), 33-85.

[3] P. Jørgensen, Local cohomology for non-commutative graded algebras, *Comm. Algebra* **25** (1997), 575-591.

[4] I. Mori, Noncommutative projective schemes and point schemes, *Algebras, Rings and Their Representations*, World Sci. Publ. (2006), 215-239.

[5] I. Mori, Co-point modules over Frobenius Koszul algebras, *Comm. Algebra* **36** (2008), 4659-4677.

[6] S. P. Smith, Some finite dimensional algebras related to elliptic curves, in *Representation Theory of Algebras and Related Topics* (Mexico City, 1994), CMS Conf. Proc. **19**, Amer. Math. Soc., Providence, (1996), 315-348.

[7] K. Ueyama, Graded Morita equivalences for generic Artin-Schelter regular algebras, preprint.

[8] J. Vitoria, Equivalences for noncommutative projective spaces, preprint.