A_n-空間と A_n-写像

蔦谷 充伸*

京都大学理学研究科 数学・数理解析専攻 数学系 修士二年

この度は城崎新人セミナーにお誘いいただき，さらに講演の機会まで与えてくださり，運営委員の皆様には深く深く感謝いたします．

本稿では著者が修士二年のときに勉強した A_n-空間について解説をする．既存の A_n-空間への入門的な解説としてはこの概念を考えた J. Stasheff 自身による [Sta70] の Chapter 11 などがある．また，A_n-空間という概念がはじめて提唱されたのは [Sta63] である．A_n-空間の間の A_n-写像については $n \leq 4$ までは [Sta70] でその構成をし，一般の A_n についても可能であろうと述べているが，実際にそれが構成されているのが [IM89] である．近年，特に数理物理の関連する方面などで operad [May72] という概念がしばしば重要なものとして現れているようであるが（残念ながら著者は詳しくない），A_n-空間はある種の operad の作用する空間と思うことができ， operad の最も基本的な例としてしばしばとりあげられる．本稿の内容とはかけ離れる部分が大きいが，operad の解説書としては [MSS02] がある．

なお，真面目に読むなら上記のようなすばらしいものがすでにいくつかあるので，講演の時の雰囲気に近く，多少「お話風」に書かせていただくことにする．そのため，条件が足りなかったり厳密でない部分があるかもしれないのでその点は注意してお読みいただきたい．

1 H-空間と位相モノイド

H-空間の定義はいろいろあるが，ここではホモトピー単位元ではなく真の単位元の存在を仮定する．つまり，基点付位相空間 (X, x_0) と基点を保つ連続写像 $m_2 : X \times X \to X$ の対 (X, m_2) が H-空間であるとは，$m_2(x, x_0) = m_2(x_0, x) = x$ が任意の $x \in X$ について成立することと定義する．H-空間 (X, m_2) が位相モノイドであるとは，m_2 が二項演算として結合的であること，つまり $m_2(1 \times m_2) = m_2(m_2 \times 1)$ であることである．たとえば位相群は単位元を基点として位相モノイドである．この二項演算が up to homotopy で結合的であるとき，つまり $m_2(1 \times m_2)$ と $m_2(m_2 \times 1)$ が基点を保ってホモトープであるとき，X はホモトピー結合的であるという．このとき，このホモトピーを $m_3 : [0,1] \times X \times X \times X \to X$ と書き，$(X, \{m_i\}_{i=2}^3)$ を A_3-空間という．A_3 の A は ‘associativity’ の頭文字からとっているものと思われる．ちなみに H-空間は A_2-空間ともいう．

2 高次のホモトピー結合性

位相モノイドはもちろんホモトピー結合的である．しかし，一般に逆は成立しない，すなわち，ホモトピー結合的な H-空間は位相モノイドであるとは限らない．これはある意味当然といえば当然で，ホモトピー結合的であるという概念が「ホモトピー論的」であるのに対し，位相モノイドのような結合性はホモトピー論的なものと比べるとかなり「硬い」印象のものである．たとえば，ホモトピー結合的な H-空間 X とホモトピー同値な位相空間 Y は，ホモトピー結合的な H-空間の構造を持つことが比較的容易に確認できる（厳密には Y の基点がホ

* tsutaya@math.kyoto-u.ac.jp

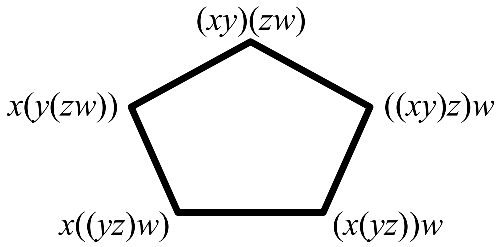
モトピー拡張性質を持つことぐらいは要請しておかないといけない）が，位相モノイドの構造をもつということは一般にホモトピー同値では保たれない（著者はその反例があるかどうかを知らないが）．そこで問題を「ホモトピー結合的な H-空間は適当な位相モノイドとホモトピー同値になるかどうか？」に置き換える．しかしそれでも一般には成立するとは限らない．つまりホモトピー結合的な H-空間の構造を持つ位相空間と，ホモトピー同値を除いて位相モノイドとなる位相空間との間には本質的にホモトピー論的な差がある．その差とはいったいなんだろうか？これに答えを与えるということが A_n-空間という概念の意義のひとつであるといってよいように思う．結果を先に言ってしまうと，A_∞-空間はホモトピー同値を除いて位相モノイドとなるのである．

A_3-空間 $(X, \{m_i\}_{i=2}^3)$ と位相モノイド (G, μ) の結合性の差は，３つの元の積の取り方についてはホモトピーを経由して結合的か，本当に結合的かというものであった．ではこれを４つの元について考えるとどうだろうか？つまり，

$$x(y(zw))\,,\, x((yz)w)\,,\, (x(yz))w\,,\, ((xy)z)w\,,\, (xy)(zw)$$

の積の取り方はどのぐらい「同じ」だろうか？

位相モノイドの場合はもちろんすべて等号で結ばれる．左から順に確認してみるとそれはすぐにわかる．それは A_3-空間の場合も同様である．つまり位相モノイドのときに等号を示したのと同じようにホモトピー結合性を表すホモトピー m_3 を使って左から順にホモトピーを作ることができる．したがって写像 $X^4 \to X$ としてはどのふたつもホモトープである．しかしよく見ると，$x(y(zw))$（一番左）から $(xy)(zw)$（一番右）へのホモトピーの取り方は上記のようにホモトピーをつなげていくものと，$x(y(zw))$ から $(xy)(zw)$ へ直接ホモトピーを作るものがある．



位相モノイド G の場合も同様にホモトピーを作ったとしても，$\mu_3 : [0,1] \times X^3 \to X$ を $\mu_3(t; x, y, z) = x(yz) = (xy)z$ としてとっておけば，上の二つのホモトピーの間に差はない．実はこれが位相モノイドと A_3-空間の本質的な差である．つまりこれらのホモトピーを基点を保つ連続写像 $X^4 \to X$ の全体のなす写像空間 $Map_0(X^4; X)$ への道 $[0,1] \to Map_0(X^4; X)$ と思うと，これらの道は違うものである．G の場合はまったく同じ道（定値道）であるが，X の場合には道が同じということを up to homotopy で考える必要がある．たとえばこれらの二つの道が端点を固定してホモトープであることと考えるのがひとつの発想である．つまり上の図で言えば五角形の辺の上だけでなく，その内側の部分に写像が拡張されていることと同じことである．このように拡張されているとき，上の五角形を K_4 と書けば，その写像は $m_4 : K_4 \times X^4 \to X$ と書ける．このとき $(X, \{m_i\}_{i=2}^4)$ を A_4-空間という．一般には A_3-空間が A_4-空間となるわけではないはずである．というのは上の図のような $Map_0(X^4; X)$ 上に描かれたループで囲まれた部分に「穴」があいていて，そのループが縮められないかもしれないからである．ちなみに「はずである」と表現しているのはそのような反例を著者が知らないからである．

上では A_4-空間の定義をしたが，一般の A_n-空間もその哲学は同じである．つまり，$(X, \{m_i\}_{i=2}^{n-1})$ が A_{n-1} 空間であるとき，$\{m_i\}_{i=2}^{n-1}$ によってある convex polytope（高次元凸多面体）K_n の境界から $Map_0(X^n; X)$ への写像とみなせる $m'_n : \partial K_n \times X^n \to X$ が構成されるが，これが K_n の内部にも拡張できるとき，その拡張を $m_n : K_n \times X^n \to X$ と書いて，$(X, \{m_i\}_{i=2}^n)$ を A_n-空間と呼ぶのである．特にこのような無限系列 $\{m_i\}_{i=2}^\infty$ がとれるとき，$(X, \{m_i\}_{i=2}^\infty)$ を A_∞-空間という．

上では A_3-空間と A_4-空間の差はわからないと書いたが，実は一般の n についてまったくわからないわけでもない．つまり A_n-空間は n 毎にある程度本質的に違う概念であることが知られている．それを保証するのが次の定理である．

定理 2.1 (Theorem 17 in [Sta63])**.** 任意の素数 p に対し，A_{p-1}-空間の構造は持つが，A_p-空間の構造は持たない位相空間が存在する．

$p = 2$ のときは A_1-空間というものが出てしまうが，A_1-空間をただの位相空間と思えば，位相空間であって H-空間でないものは存在するという主張になる．これは存在することがわかる．なぜなら H-空間の基本群は必ず可換になるので，非可換な基本群を持つ空間がその例になっているからである．

なお，上の定理で素数が出てきているのは証明において障害類を見たりと代数的な議論をするためである．

3 A_n-構造

複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ は $2n+1$-次元球面 $S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ を絶対値 1 の複素数の全体 $U(1) \subset \mathbf{C}^\times$ によるスカラー倍の作用で割った空間と思える．これによりファイバー束 $U(1) \to S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ が得られる．特に次のような包含関係がある．

$$\begin{tikzcd} U(1) \arrow[r, hook] \arrow[d] & S^3 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, hook] & S^{2n+1} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, hook] & S^\infty \arrow[d] \\ point \arrow[r, hook] & \mathbf{C}P^1 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \mathbf{C}P^n \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \mathbf{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

ここで各全空間の包含写像 $S^{2n-1} \to S^{2n+1}$ は定値写像にホモトープである．

J. Milnor は上記の構成を $U(1)$ 以外の一般の位相群 G にも拡張し，次のようなフィルトレーションを持つファイバー束 $G \to EG \to BG$ であって EG が可縮なものを構成した [Mil56].

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[d] & E_1G \arrow[r, hook] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, hook] & E_nG \arrow[r, hook] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, hook] & EG \arrow[d] \\ point \arrow[r, hook] & B_1G \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & B_nG \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & BG \end{tikzcd}$$

先ほどと同様に各 $E_{n-1}G \to E_nG$ は定値写像にホモトープである．

同様の構成は位相群に限らず位相モノイドに対しても行うことができる．幾何学的バー構成 (geometric bar construction) と呼ばれているものを使う方法はそれにあたる．たとえば [May72] に解説がある．

Stasheff はこの構成を A_n-空間に対して行った．上記の構成は位相モノイドや位相群の演算を使って行われるのだが，それを $\{m_i\}_{i=2}^n$ という写像の族を使って行ったのである．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & E_1X \arrow[r, hook] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, hook] & E_{n-1}X \arrow[d] \\ point \arrow[r, hook] & B_1X \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & B_{n-1}X \end{tikzcd}$$

ここで各射影は準ファイバー空間となっており，各 $E_{i-1}X \to E_iX$ は定値写像にホモトープである．

Stasheff は逆にこのような性質を持つ $\{E_iX \to B_iX\}_{i=0}^{n-1}$ が存在するならば X は A_n-空間となることを示した．とくに X が A_∞-空間ならば準ファイバー空間 $X \to EX \to BX$ が構成されて EX は可縮となる．すなわち X は BX の基点付ループ空間

$$\Omega BX = \{\, \ell : [0,1] \to BX \mid \ell(0) = \ell(1) = b_0 \,\}$$

とホモトピー同値である．ΩBX は道をつなげる写像 $\mu : \Omega BX \times \Omega BX \to \Omega BX$ により二項演算が与えられる．ここで $\ell, \ell' \in \Omega BX$ に対し

$$\mu(\ell, \ell')(t) = \begin{cases} \ell(2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ \ell'(2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

である．一見 $(\Omega BX, \mu)$ は（我々の定義で）H-空間になりそうに見えるが，実はそうではない．というのも単位元にあたるものがないからである．結合性がないこともすぐにわかる．ところが，ΩBX は次に説明する Moore ループ空間 $\Omega_M BX$ に取り替えれば位相モノイドになる．

$$\Omega_M BX = \{\, (\ell, a) \in Map([0,\infty), BX) \times [0,\infty) \,|\, \ell(0) = \ell(t) = b_0 \, (t \geq a) \,\}$$

$\Omega_M BX$ の元の第二成分はループの「長さ」を表している．長さまで到達した後はずっと基点で停止しているようなループの全体を考えているのである．ここで，(ℓ, a) と (ℓ', a') の積 (L, A) は，

$$L(t) = \begin{cases} \ell(t) & (0 \leq t \leq a) \\ \ell'(t-a) & (a \leq t) \end{cases}$$

および $A = a + a'$ によって定める．すると $\Omega_M BX$ は位相モノイドとなる．単位元は長さ 0 の定値道である．すると長さ 1 のループへの包含写像 $\Omega BX \to \Omega_M BX$ はホモトピー同値写像である．以上をまとめると次のようになる．

命題 3.1. A_∞-空間は位相モノイドのホモトピー型をもつ．

A_∞-空間とホモトピー同値な空間は A_∞-空間の構造をもつことが知られている．これと組み合わせると，A_∞-空間の構造を持つことと位相モノイドとホモトピー同値であることが同値であることがわかる．空間が位相モノイドの構造を持つことは「ホモトピー論的」ではなかったが，それに対応するホモトピー論的な概念は A_∞-空間の構造を持つことなのである．

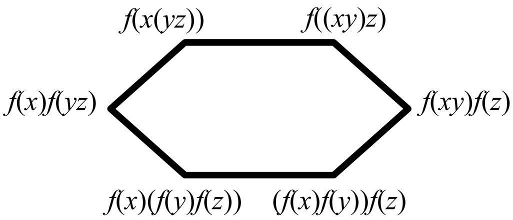
4 H-写像

ここまでは空間が結合性の高い演算を持つかどうか，ということに注目してきて，演算そのものにはあまり注目をしていなかった．A_n をある種の代数構造と考えるならば，それに対応する「準同型」を考えたいという発想は自然である．ここから先はそういうものを考えることにする．

位相群 (G, m) から位相群 (G', m') への準同型写像 $f : G \to G'$ とは $f(gh) = f(g)f(h)$ が任意の $g, h \in G$ に対して成立するものであった．この条件は写像のレベルで書けば $fm = m'(f \times f)$ という等式になる．H-空間の間の H-写像とはこの条件式を up to homotopy にしたものである．つまり，(X, m) と (X', m') が H-空間であるとき，基点を保つ写像 $f : X \to X'$ が H-写像であるとは，fm と $m'(f \times f)$ が基点を保ってホモトープとなることである．

5 A_n-写像

$(X, \{m_i\}_{i=2}^3)$ および $(X', \{m'_i\}_{i=2}^3)$ を A_3-空間としたとき，$f : X \to X'$ がその間の H-写像であるとする．fm から $m'(f \times f)$ へのホモトピーを $f_2 : [0,1] \times X \times X \to X'$ とすれば，m_2, m_3 から $\partial K_4 \times X^4 \to X$ を作ったときと同じように，次のような六角形の境界にパラメータをとるホモトピーが作れる：



六角形を J_3 と書けば，上記は写像 $\partial J_3 \times X^3 \to X'$ を表している．これが $J_3 \times X^3 \to X'$ に拡張できるとき，その写像を $f_3 : J_3 \times X^3 \to X'$ と書き，$(f, \{f_i\}_{i=2}^3)$ を A_3-写像というのである．A_3-写像はホモトピー結合性を保つ写像と解釈できる．より高次の結合性を保つ A_n-写像も考え方は同じである．ただし，このとき現れる polytope J_n（ multiplihedron と呼ばれている）は K_n（ associahedron と呼ばれている）よりも組み合わせ的にはずっと複雑な構造を持っている．

X と X' が A_n-空間であるとき，その間の A_n-写像 $f : X \to X'$ が存在して，f がホモトピー同値写像でもあるとき，f を A_n-同値写像といい，このとき X と X' は A_n-同値であるという．A_n-同値写像の逆もまた A_n-写像であること，および A_n-写像と A_n-写像の合成もまた A_n-写像となることが知られているので，これは同値関係であることがわかる．

実は，任意の A_∞-空間は適当な位相モノイドとホモトピー同値であるだけでなく，A_∞-同値であることが知られている．つまり，演算も込みで up to homotopy で位相モノイドになっているということである．

A_n-写像にも A_n-構造と呼ばれるものが存在するが，ここでは割愛する．詳しくは [IM89] を参照．

6 ゲージ群の A_n-同値類の有限性

最後に，著者の修士論文の結果を簡単に説明する．

以下では G を Lie 群，B を有限 CW 複体とする．B 上の主 G-束 P は，底空間の恒等写像を被覆する束写像の全体のなす群 $\mathcal{G}(P)$（P のゲージ群あるいはゲージ変換群と呼ばれる，ちなみにゲージ群という呼び方は物理学における出自からすれば誤った呼称である）という位相群をもつ．これは，随伴作用によって G を左 G-空間と思って得られる同伴束 $P \times_G G$ の切断の全体と同一視できる．これは各ファイバーが位相群となっている "group bundle" である．主結果は次のように述べられる：

定理 6.1. n が有限のとき，B 上の主 G-束 P の同伴束 $E = P \times_G G$ として現れる group bundle は，fibrewise A_n-同値を除いて有限個しか存在しない．

ここで fibrewise A_n-同値という概念は定義していないが，大体各ファイバーごとの A_n-同値写像 $(f_b : E_b \to E'_b, \{f_{b,i}\}_{i=2}^n)$ が $b \in B$ についても連続的にとれているようなものが存在することと思えばよい．これを厳密に定義すれば次のことはすぐにわかる．

系 6.2. n が有限のとき，B 上の主 G-束 P のゲージ群 $\mathcal{G}(P)$ として現れる位相群は，A_n-同値を除いて有限個しか存在しない．

証明の方針は代数的位相幾何学における「空間のホモトピー型の有理化」という概念を用いる部分が本質的である．これを用いると上記の group bundle のある種の分類写像が有限集合の部分に入ってしまうことがわかり（その部分は標準的な Puppe の完全列を使った議論である），結果が従う．なお，こういった問題意識については [CS00] の Introduction に詳しい経緯が書かれているのでそちらに委ねることにする．なお，この結果は [CS00] における「H-空間版」を拡張したものであり，証明の方針も全く平行なものである．

こういったゲージ群の個数の勘定の具体例および，こういったことがわかると何が面白いのか，といったこと

は著者はよく知らない．そのため，今回の講演・報告は修士論文の結果そのものよりも A_n という先人達により既に構築されている概念の，特に定義周辺に注目したものにせざるをえなかった．それは著者の不勉強の致すところに他ならず，これからの課題としなければならない．

参考文献

[CS00] M. C. Crabb and W. A. Sutherland, *Counting homotopy types of gauge groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 81 (2000), 747-768.

[IM89] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy associativity*, Lecture Notes in Mathematics, 1370 (1989), 193-220.

[May72] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 271. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Mil56] J. Milnor, *Construction of universal bundles, II*, Ann. Math. 68 (1956), 430-436.

[MSS02] M. Markl, S. Shnider and J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 96. American Mathematical Society, 2002.

[Sta63] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. I*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292.

[Sta70] J. Stasheff, *H-spaces from a homotopy point of view*, Lecture Notes in Mathematics, 161. Springer-Verlag, Berlin, 1970.