Enhanced Binding について

寺西功哲*

東京大学数理科学研究科

ここでは非相対論的量子場の基底状態の問題と関連して現われてくる Enhanced Binding という現象について紹介できればと考えています.

1 Enhanced Binding

量子論の問題において安定性の観点から基底状態の存在が問題となる. 但し, ここで基底状態とは次で定められるものである. 下に有界な自己共役作用素 H に対してスペクトルの下限である $E_0 := \inf \sigma(H)$ が点スペクトルに含まれる時 H は基底状態を持つといい, $\ker(H - E_0)$ の元を基底状態という.

ここで基底状態の存在と関連している Enhanced Binding という現象について量子力学で簡単に見てみる. Hilbert 空間 h として $h = \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R})$ を考える. $\omega : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を連続関数で, $\omega(k) \to \infty$ $(|k| \to \infty)$ を満たし, $m := \inf \omega(k)$ とする. $L^2(\mathbb{R})$ における関数 ω の掛け算作用素を $\hat{\omega}$ により表わす.(この関数は大体の粒子のエネルギーを表わしており, m は粒子の質量を表わしている.) 次に関数 $g \in L^2(\mathbb{R})$ $(g \neq 0)$ に対して, $A_g : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ を $A_g \psi := (g, \psi)_{L^2(\mathbb{R})}$ により定める.(この作用素は粒子の消滅を表現している.) この時

$$H_0 := \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega} \end{pmatrix} \quad , \quad H_I := \begin{pmatrix} 0 & A_g \\ A_g^* & 0 \end{pmatrix}$$

に対して, $H(g) = H_0 + gH_I$ という形の作用素を考える. この作用素 $H(g)$ は Kato-Rellich の定理により, 任意の結合定数 $g \in [0, \infty)$ に対して自己共役作用素である事が分る. 又, $H(0) = H_0$ のスペクトルは $\sigma(H_0) = \{\mu_0\} \cup [m, \infty)$, $\sigma_p(H_0) = \{\mu_0\}$ となるので, $\mu_0 > m$ のとき H_0 の点スペクトル μ_0 は連続スペクトルの中に埋まっており (このような固有値を埋蔵固有値と言う.), H_0 は基底状態持たない. 一方 $\mu_0 < m$ のときは μ_0 が H_0 のスペクトルの下限となるので基底状態を持つ. さて, ここで $\mu_0 < m$ と $\mu_0 > m$ の場合に摂動項 gH_I のもと結合定数 g を変えることにより $H(g)$ の固有値がどのように振舞うかを見てみる.

先ず, $\mu_0 < m$ の場合だがこのときは μ_0 と連続スペクトルの間にギャップがある為, 結合定数 g を変化させてもある程度良い振る舞いをして, μ_0 に対応する固有値は $H(g)$ のスペクトルの下限であり続ける. つまり $H(g)$ は基底状態を常に持つ.

一方, 埋蔵固有値となる $\mu_0 > m$ の場合はある臨界点 g_0 より結合定数が小さい場合, $g < g_0$ のときは摂動の効果で H_0 の埋蔵固有値 μ_0 の情報は消えて $H(g)$ は固有値を持たない. しかし, 臨界点 g_0 を境に $g > g_0$ では突然 $H(g)$ は基底状態を持つようになる. このような結合定数の小さいときには基底状態が存在しないが, 結合定数が大きくなると基底状態を持つ現象を Enhanced Binding という.

* teranish@ms.u-tokyo.ac.jp

2 場の理論

先程は量子力学で Enhanced Binding を見たが, 同じような事は場の量子論においても起こる. 先ず、場の量子論の記述に必要なボソン Fock 空間, 生成・消滅作用素, 第 2 量子化作用素について簡単に準備する. h を $\mathbb{C}$ 上の可分な Hilbert 空間, $\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とする. $\otimes^n h$ 上の対称化作用素 S_n を

$$S_n\bigl(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n\bigr) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)} \qquad (\psi_i \in h, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$$

により定める. $\otimes_s^0 h = \mathbb{C}$, $\otimes_s^n h = S_n(\otimes^n h)$ $(n \geqq 1)$ に対して.

$$\mathscr{F}_b(h) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n h = \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_0^\infty \,\middle|\, \Psi^{(n)} \in \otimes_s^n h, \;\; \|\Psi\|^2_{\mathscr{F}_b(h)} := \sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi^{(n)}\|^2_{\otimes_s^n h} < \infty \right\}$$

とする. この空間を h 上のボソン Fock 空間と言う. 各 $f \in h$ に対して生成作用素 $a^\dagger(f)$ を

$$D\bigl(a^\dagger(f)\bigr) := \left\{ \Psi \in \mathscr{F}_b(h) \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)})\|^2_{\otimes^{n+1} h} < \infty \right\},$$

$$\bigl(a^\dagger(f)\Psi\bigr)^{(n)} := \sqrt{n+1}\, S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)}),$$

消滅作用素 $a(f)$ を $a(f) = [a^\dagger(f)]^*$ により定める (それぞれ先の A_g^*, A_g と同じ働きをする). ここで $D(T)$ は作用素 T の定義域を表わす. この作用素はボソン Fock 空間のある稠密な部分空間上で次の重要な正準交換関係を満たす.

$$[a(f), a^\dagger(g)] = (f, g)_h, \quad [a^\dagger(f), a^\dagger(g)] = 0, \quad [a(f), a(g)] = 0.$$

T の第 2 量子化 $d\Gamma(T)$ を $d\Gamma(T) := \oplus_{n=0}^{\infty} T^{(n)}$ により定める. ここで $T^{(n)}$ は次のものとする.

$$T^{(n)} := \overline{\sum_{j=0}^{n} I \otimes \cdots \otimes I \otimes \underset{(j\text{番目})}{T} \otimes I \otimes \cdots \otimes I}$$

但し, $\overline{T}$ は作用素 T の閉包を表わす.

場の量子論の重要なモデルとして Nelson, Pauli-Fierz, Dirac-Maxwell モデル等があるが, ここでは例として GSB(Generalized Spin-Boson) モデルについて見てみる. このモデルは新井-廣川 [AH97] により導入された. GSB モデルは Hilbert 空間として $\mathscr{H} \otimes \mathscr{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d)$ を考える. 但し, $\mathscr{H}$ は $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間である. A を下から有界な $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素, B_j, $j = 1, \ldots, J$, はある仮定を満たす $\mathscr{H}$ 上の対称作用素. $\phi(\lambda) = (a(\lambda) + a^\dagger(\lambda))/\sqrt{2}$, $\lambda \in L^2(\mathbb{R}^d)$ としたとき, 結合定数 $g \in \mathbb{R}$ に対して Hamiltonian を

$$H_{GSB} = A \otimes I + I \otimes d\Gamma(\hat{\omega}) + g \overline{\sum_{j=1}^{J} B_j \otimes \phi(\lambda_j)}$$

により定める. このようにして定めた H_{GSB} だが, 量子論から自己共役作用素であることが要求される. これに関しては Kato-Rellich の定理により H_{GSB} が自己共役作用素である事が分る. また, 先にみたように $H_0 = A \otimes I + I \otimes d\Gamma(\hat{\omega})$ のスペクトルの下限が離散固有値となっている場合には H_{GSB} の基底状態の存在が分る. しかし, H_0 の固有値が埋蔵固有値として埋まっている場合には, 一般に Enhanced Binding が起こり基底状態が存在する事を示すのは大変難しい. GSB モデルにおいてはある結合定数では Enhanced Binding が起こる事が確認されている [AK03]. また, Pauli-Fierz モデルにおいても状況は似たようなもので, スペクトルギャップがあれば基底状態の存在が任意の結合定数で言える. しかし, そうでない場合には Enhanced Binding が起こる事が示されているものの, 結合定数が十分小さいという条件が付く.

参考文献

[AH97] A. Arai and M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, J. Funct. Anal. **151** (1997), no. 2, 455–503.

[AK03] A. Arai and H. Kawano, Enhanced binding in a general class of quantum field models, Rev. Math. Phys. **15** (2003), no. 4, 387–423.

[新井 06] 新井朝雄, 量子現象の数理, 朝倉書店, 2006.

[GLL01] M. Griesemer, E. Lieb, and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, Invent. Math. **145** (2001), no. 3, 557–595.

[HS01] F. Hiroshima and H. Spohn, Enhanced binding through coupling to a quantum field, Ann. Henri Poincaré **2** (2001), no. 6, 1159–1187.