有限生成群の圧縮指数の評価について

田中亮吉*

京都大学大学院理学研究科数学教室 D2, 理研 CDB

1 はじめに・謝辞

第 7 回城崎新人セミナーにおいて, 運営委員として参加させていただき, 貴重な経験をさせていただいたことに対して, 今回のメンバーやお世話になった先生方, また参加者の方々に感謝いたします. 本稿では, 有限生成群の Banach 空間への埋め込みに関する Naor-Peres の論文 [NP] の一部を紹介いたします. 特に, Gaussian Hilbert space を用いた同変圧縮指数と呼ばれる量の評価を紹介するのが目的です. Gauss 測度を効果的に用いる巧妙な議論に興味を持っていただけたら幸いです. 本論文を勉強するきっかけを下さった数理解析研究所の本多正平さんと横田巧さんに感謝いたします.

2 圧縮指数とその評価

以下, G を有限生成の無限群とし, S を生成元からなる有限集合で対称かつ単位元は含まないものとする. ここで対称であるとは, $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$ を満たすことである. また, S により誘導される G 上の左不変な語距離を d_S と表す. このとき, X を Banach 空間とし, G の X に対する圧縮指数 (compression exponent) を以下で定義する.

定義 2.1. G の X に対する圧縮指数 $\alpha^*_X(G)$ を以下を満たす $\alpha \geq 0$ の sup. として定義する: $\exists$Lipschitz 写像 $f : G \to X$, $\exists$ 正定数 $c > 0$, $\exists N$ s. t. $\forall x, y \in G$ に対して $d_S(x, y) \geq N$ ならば, $\|f(x) - f(y)\| \geq c \cdot d_S(x, y)^\alpha$.

Remark 2.2. この値は対称かつ有限な生成系 S の取り方によらない. これは, 上の定義から $f : G \to X$ が Large scale Lipshitz 写像であるとしても同じ値を定めることが分かり, それから従う. またそのことから, より一般に擬等長不変であることも分かる.

定義から, $f : G \to X$ が Lipshitz であることにより, 常に $\alpha^*_X(G) \leq 1$ である.

Banach 空間 X として L_p 空間を考えるときは, $\alpha^*_p(G)$ と表記される. また, X が Hilbert 空間であるとき, $\alpha^*_2(G)$ は, G の Hilbert 圧縮指数と呼ばれる.

例 2.3. $\alpha^*_2(\mathbb{Z}) = 1$.

例 2.4. $\alpha^*_2(F_2) = 1$. ここで F_2 は階数 2 の自由群である ([GK]).

例 2.5. $\alpha^*_2(\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}) = \frac{2}{3}$. これは Hilbert 圧縮指数が, 真に 0 と 1 の間にある初めての例であった ([NP] など).

上記の圧縮指数の定義には群作用の構造は使われていない. 実際にこの量は, 一般に非有界な距離空間に対しても定義される. 群作用込みの圧縮指数として, 同変圧縮指数 (equivariant compression exponent) というもの

* rtanaka@math.kyoto-u.ac.jp

が定義される. 以下, これを定義していく.

Banach 空間 X に対して, $Isom(X)$ を線形等長自己同型作用素からなる群とする. 準同型 $\pi : G \to Isom(X)$ を 1 つ固定する.

定義 2.6. 写像 $f : G \to X$ が π に関する 1-cocycle であるとは, 以下を満たすときをいう:

$$\forall x, \forall y \in G, f(xy) = \pi(x)f(y) + f(x).$$

また π に関する 1-cocycle 全体の集合を $Z^1(G, \pi)$ で表す.

次に, この 1-cocycle を用いて写像 $\psi : G \to X$ が同変 (equivariant) であることを定義する.

定義 2.7. $\psi : G \to X$ が同変であるとは, 以下を満たすときをいう:

$$\exists \nu \in X, \exists \pi : G \to Isom(X), \exists f \in Z^1(G, \pi) \ s.t. \ \psi(x) = \pi(x)\nu + f(x) \quad (x \in G).$$

つまり ψ は G の X へのアファイン等長作用の 1 つの軌道になっている. 同変圧縮指数とは圧縮指数の定義において, Lipshitz かつ同変写像に制限して定義されるものである.

定義 2.8. G の X に対する圧縮指数 $\alpha^{\sharp}_X(G)$ を以下を満たす $\alpha \geq 0$ の sup. として定義する: $\exists$ 同変かつ Lipschitz 写像 $\psi : G \to X$, $\exists$ 正定数 $c > 0$, $\exists N$ s. t. $\forall x, \forall y \in G$ に対して $d_S(x, y) \geq N$ ならば, $\|\psi(x) - \psi(y)\| \geq c \cdot d_S(x, y)^{\alpha}$.

先と同じように Banach 空間 X が L_p 空間であるときには, $\alpha^{\sharp}_p(G)$ と略記する.

Remark 2.9. この定義は対称かつ有限な生成系 S の取り方によらない. また, $\alpha^{\sharp}_X \leq \alpha^{*}_X(G)$ である. もし 2 つの有限生成群 G_1, G_2 がある G を有限指数の部分群として含むなら, $\alpha^{\sharp}_X(G_1) = \alpha^{\sharp}_X(G_2) = \alpha^{\sharp}_X(G)$ であることが分かる.

例 2.10. $\alpha^{\sharp}_2(\mathbb{Z}) = 1$.

例 2.11. $\alpha^{\sharp}_2(F_2) = \frac{1}{2}$. ([GK],[NP]).

もし $\psi : G \to X$ が同変ならば, 定義よりある G から $Isom(X)$ への準同型写像 π があって, ある $f \in Z^1(G, \pi)$ と $\nu \in X$ に対して, $\pi(x)$ が X の等長作用素であることから,

$$\|f(x) - f(y)\| - 2\|\nu\| \leq \|\psi(x) - \psi(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| + 2\|\nu\| \quad (x, y \in G)$$

が成り立つことが分かる. これにより同変圧縮指数は Lipschitz である 1-cocycle を用いても同じ値を定めることが分かる. よって, 同変圧縮指数を評価するには Lipschitz である 1-cocycle を考えればよい.

本稿の目的は, 以下の補題の証明を紹介することである.

補題 2.12. 任意の有限生成群 G と任意の $p \geq 1$ に対して,

$$\alpha^{\sharp}_p(G) \geq \alpha^{\sharp}_2(G).$$

証明. 同変圧縮指数は sup. により定義されているので, 次のような方針で上の不等式を示していく. まず, Lipshitz である 1-cocycle $f : G \to l_2$ に対し, Lipshitz である 1-cocyle $\tilde{f} : G \to L_p$ を構成する. 以下, この写像を構成していくため, 記号の準備をする.

l_2 の正規直交系を $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ とおく. γ を $\mathbb{C}$ 上の Gauss 測度とする. ここでは $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ を同一視することで,

$$d\gamma = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

で定義されているとする．

$\Omega := \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ とその上の測度を $\mu := \gamma^{\mathbb{N}}$ で定義する．写像

$$g_j : \Omega \to \mathbb{C},$$

を j 番目の成分への射影 $g_j(z_1, \dots, z_j, \dots) = z_j$ として定義する．このとき, $L_2(\Omega, \mu)$ の部分空間

$$H := \{h \in L_2(\Omega, \mu) \mid h = \sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j, (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_2\}$$

を定義する． この定義が well-defined であることは, Fubini の定理より $h = \sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j$ が Ω 上 almost everywhere で収束して

$$\int_{\Omega} |h|^2 d\mu < \infty,$$

であることから分かる．

ここで次の主張を示す．

主張 2.13. h の分布と $h' := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot g_1$ の分布は一致する．すなわち,

$$\mu^h = \mu^{h'} \text{ on } \mathbb{C}.$$

ここで $\mu^h, \mu^{h'}$ はそれぞれ h, h' による μ の像測度である．このことから μ^h は $\mathbb{C}$ 上 Gauss 測度であることが分かる．

証明. ここで特性関数 (characteristic function) を使った議論を思い出す．h に対して, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 上の特性関数は

$$\psi_h(t_1, t_2) := \mathbb{E}\left[e^{\sqrt{-1}(t_1 Reh + t_2 Imh)}\right]$$

と定義される．ここで

$$\mathbb{E}\left[e^{\sqrt{-1}(t_1 Reh + t_2 Imh)}\right] = \int_{\Omega} e^{\sqrt{-1}(t_1 Reh + t_2 Imh)} d\mu$$

である．h' に対しても同様に定義される．このとき, もし $\psi_h = \psi_{h'}$ on $\mathbb{R}^2$ ならば, $\mu^h = \mu^{h'}$ on $\mathbb{R}^2$ である．h' の特性関数は

$$\psi_{h'}(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 (t_1^2 + t_2^2)\right)$$

である．$h_n := \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot g_j$ とおくと, h_n の特性関数は

$$\psi_{h_n}(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 (t_1^2 + t_2^2)\right)$$

である．一方, Lebesgue の優収束定理より μ^{h_n} は μ^h に $n \to \infty$ で弱収束する．このことから $\psi_{h_n}(t_1, t_2)$ は $\psi_h(t_1, t_2)$ に $n \to \infty$ で各点収束する．よって

$$\psi_h(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 (t_1^2 + t_2^2)\right)$$

が分かる．以上より,

$$\psi_h = \psi_{h'} \text{ on } \mathbb{R}^2$$

が分かったので,

$$\mu^h = \mu^{h'} \text{ on } \mathbb{R}^2$$

である．以上で主張 2.13 が得られた． □

補題 2.12 の証明に戻る.

$f: G \to l_2$ に対して,

$$\tilde{f}: G \to L_p(\Omega, \mu),$$

を $x \in G$ に対して,

$$\tilde{f}(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \langle f(x), e_j \rangle g_j$$

と定義する. ここで $\tilde{f}(x) \in L_p(\Omega, \mu)$ であることは, 次のようにして分かる. 各 $x \in G$ に対して, $\tilde{f}(x) \in H \subset L_2(\Omega, \mu)$ であり, 主張 2.13 より, $\mathbb{C}$ 上, $\mu^{\tilde{f}(x)} = \mu^{\|f(x)\|_2 \cdot g_1}$ である. これより

$$\int_\Omega |\tilde{f}(x)|^p d\mu = \int_{\mathbb{C}} |z|^p d\mu^{\|f(x)\|_2 \cdot g_1} < \infty,$$

であることが, Gauss 測度の全ての moment が有限であることから分かる. また, この議論により, 一般に $p \geq 1$ で $H \subset L_p(\Omega, \mu)$ であることが分かる.

主張 2.14. $f: G \to l_2$ が Lipshitz, 1-cocycle であるとき, $\tilde{f}: G \to L_p(\Omega, \mu)$ は Lipshitz, 1-cocycle である.

証明. まず, $\tilde{f}$ が Lipshitz であることを示す. 任意の $x, y \in G$ に対して, $\mathbb{C}$ 上 $f(x) - f(y)$ の分布は $\|f(x) - f(y)\|_2 \cdot g_1$ の分布と一致する. これより

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\|_{L_p}^p = \|f(x) - f(y)\|_2^p \cdot \|g_1\|_{L_p}^p,$$

であり, f が Lipshitz であることから $\tilde{f}$ が Lipshitz であることが分かる.

次に, $\tilde{f}$ が 1-cocyle であることを示す.

$f: G \to l_2$ が 1-cocycle であることから, 準同型 $\pi: G \to Isom(l_2)$ で任意の $x, y \in G$ に対して, $f(xy) = \pi(x)f(y) + f(x)$ を満たすものが存在する. このとき, $\tilde{\pi}: G \to Isom(L_p(\Omega, \mu))$ を次のように定義する: $h \in L_p(\Omega, \mu)$ に対して,

$$\tilde{\pi}(x)h(z) = h(\pi(x)^{-1}z),$$

と定義する. ここで $z \in \Omega$ に対して, $\pi(x)^{-1}z := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle \pi(x)^{-1}e_k, e_j \rangle z_j\right)_{k=1}^{\infty} \in \Omega$ a.e. で定義されている. 各 k で $\sum_{j=1}^{\infty} \langle \pi(x)^{-1}e_k, e_j \rangle g_j$ の分布は g_1 の分布に一致しているので, $\mu^{\pi(x)^{-1}} = \mu$ であり (measure preserving), $\|\tilde{\pi}(x)h\|_p = \|h\|_p$ である.

このとき, $\tilde{f}$ は $\tilde{\pi}: G \to Isom(L_p(\Omega, \mu))$ に関する 1-cocycle であることを言いたい.

その前に $\tilde{\pi}(x)\tilde{f}(y) = \widetilde{\pi(x)f(y)}$ であることを確認する.

almost all $z \in \Omega$ に対して, $\tilde{\pi}(x)\tilde{f}(y)(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f(y), e_j \rangle \langle \pi(x)^{-1}z, e_j \rangle$. $\pi: G \to Isom(l_2)$ は実際にはユニタリ表現なので, $\pi(x)^{-1} = \pi(x)^*$ であることから, 計算により

$$\tilde{\pi}(x)\tilde{f}(y)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \pi(x)f(y), e_k \rangle z_k = \widetilde{\pi(x)f(y)}(z)$$

を示すことが出来る. f が 1-cocycle であることから

$$\tilde{f}(xy) = \widetilde{\pi(x)f(y)} + \tilde{f}(x) = \tilde{\pi}(x)\tilde{f}(y) + \tilde{f}(x)$$

であり, $\tilde{f}: G \to L_p(\Omega, \mu)$ は $\tilde{\pi}$ に関する 1-cocycle である. これで主張 2.14 が得られた. □

補題 2.12 の主張に戻る.

任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\alpha \geq 0$ と Lipshitz かつ 1-cocycle である $f: G \to l_2$ で, 任意の $x, y \in G$ に対して $\|f(x) - f(y)\|_2 \gtrsim d_S(x, y)^\alpha$ かつ $\alpha_2^\sharp(G) - \epsilon < \alpha$ を満たすものが存在する.

このとき, これまでの構成により $\tilde{f}: G \to L_p(\Omega, \mu)$ は $\tilde{\pi}: G \to Isom(L_p(\Omega, \mu))$ に関する 1-cocycle であり, $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\|_p \gtrsim d_S(x,y)^\alpha$ である. よって, $\alpha_p^\sharp(G) > \alpha_2^\sharp(G) - \epsilon$. $\epsilon > 0$ は任意だったので,

$$\alpha_p^\sharp(G) \geq \alpha_2^\sharp(G),$$

である. これで補題 2.12 が得られた.

$\square$

参考文献

[GK] Guentner, E., Kaminker, J., Exactness and uniform embeddability of discrete groups, J. London Math. Soc. (2) 70 (2004) 703-718.

[NP] Naor, A., Peres, Y., Embeddings of discrete groups and the speed of random walks, International Mathematics Research Notices 2008.