ランダムウォークのパスの幾何学的構造について

氏名　白石大典*

京都大学大学院理学研究科数学教室修士２年

この講演は以下の二つの論文の内容に基づいている。

(i) Heat kernel for random walk trace on $\mathbb{Z}^3$ and $\mathbb{Z}^4$

(ii) Exact value of the resistance exponent for four dimensional random walk trace

以下、それぞれの論文で得た結果の概要を、研究の背景を交えながら述べていく。

1　研究背景

ランダムな媒質上での物理現象を数学的に調べる研究は、非一様媒質における現象を理解しようとする試みのひとつである。これは結晶の成長現象のようなランダムな媒質に対する、熱や波の伝播の解析を試みようという数理物理学からの要請で始まった。ランダム媒質上の現象の性質は必然的に媒質の構造に依存することになるが、両者の関係性を明確にすることが重要となる。

ランダム媒質上での物理現象を解析する手法として、媒質に電気回路の構造を導入し、その回路から定まる媒質の上のランダムウォーク（RWRE）を解析するというものがある。その手法は確率論とポテンシャル論をうまく融合させている点が特徴的である。RWRE の解析は一般には困難な場合が多いが、最近になってようやくある一部のランダム媒質に対して研究がなされるようになってきた。そこでの解析を行う際に重要となる量として

・volume: 媒質（グラフ）の頂点の個数に関わる量

・resistance: 媒質に入れた電気回路から定まる有効抵抗

という媒質の幾何学的構造に関係する量がある。([9]) このように、ランダム媒質の幾何学的性質とその上の RW の解析的性質の関係性を理解し、媒質そのものが持つ本質的な性質を明確にしていくことが目標となる。

このような背景の中、ランダムウォークに対する理解を深めるため、修士のセミナーにおいて、Gregory F. Lawler の [10] を勉強した。そこでは、cut-time や loop-erased random walk といったランダムウォークの幾何学的構造を表す量について学ぶことができた。

こうして複雑な形状のランダム媒質のとして、RW の軌跡に焦点を絞って研究するに至った。RW の軌跡の上での解析は、数学と物理の両方からの注目を集め、活発に研究されてきた。([13]) とりわけ、20 世紀後半に RW の軌跡の構造に関する研究が進んだこと及び RWRE を解析するための手法が近年ようやく整備されてきたこともあって、その上での解析を精密に行える段階になった。そこで、本研究では、RW の軌跡の上の RW のより深い理解を目標に研究を行った。

* email　daisuke@math.kyoto-u.ac.jp

2 モデル

$S=(S_n)_{n\geq 0}$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の原点から出発するシンプル RW とする。S は確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ の上に定義されているとする。RW の軌跡を $\mathcal{G}$ で表す。すなわち $\mathcal{G}$ は S が通過した点を頂点とし、通過した辺をボンドとするランダムな $\mathbb{Z}^d$ の部分グラフである。$\mathcal{G}$ の上の原点から出発するシンプル RW を $X=(X_n)_{n\geq 0}$ とする。このモデルでは、ランダムな媒質は $\mathcal{G}$ で、その上のランダムウォーク X の解析が目標となる。ここで、S の再帰性から、$d=1,2$ の場合は、$\mathcal{G}$ は元々の空間 $\mathbb{Z}^d$（正確には、$\mathbb{Z}^d$ の点を頂点とし、ユークリッド距離が 1 である任意の 2 点を辺で結ぶことによって得られるグラフ）と確率 1 で一致するので ([5])、このモデルは自明なものとなる。そこで以下では $d\geq 3$ の場合を考察していく。

X が $2n$ 時間後に原点に戻ってくる確率を、$\mathcal{G}$ における原点の重みで割ったもの（以下これを熱核と呼ぶ）を $p_{2n}^{\mathcal{G}}(0,0)$ とおく。熱核を評価することにより、X の挙動を理解しようというのが、この論文の目標である。

$\mathcal{G}$ の各ボンドの上に、単位抵抗をのせることにより、$\mathcal{G}$ を電気回路とみなすことができるが、この電気回路から定まる有効抵抗を $R_{\mathcal{G}}(\cdot,\cdot)$ で表す。上で述べたように、この量は、X の熱核を評価する上で重要な役割を果たす。一般的に有効抵抗の評価は困難なものである。それゆえ熱核の評価も難しいものとなるのである。

以下では、ある定数 $c_1,c_2\in(0,\infty)$ があって、$c_1b_n\leq a_n\leq c_2b_n$ が成立するとき、$a_n\asymp b_n$ と書くことにする。また、$a_n\approx b_n$ は $\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{\log b_n}=1$ であることを表すものとする。

3 先行結果

X についての先行結果として、P に関して確率 1 で、X は再帰的であることが [2] で示されている。実際には、[2] では、各頂点から出るボンドの数が有限であるような連結無限グラフの上の RW の軌跡に対して同様の結果を示しており、これはその帰結である。

X の再帰性よりも強い結果は、[4] により得られた。[4] において、$d\geq 5$ の場合、$p_{2n}^{\mathcal{G}}(0,0)\asymp n^{-\frac{1}{2}}$ であること及び X のスケーリング極限はブラウン運動であることが、P に関して確率 1 で成立するという quenched な形で示されている。この結果は、高次元の場合の X の挙動は $\mathbb{Z}^1$ 上のシンプル RW の挙動と類似していることを示すものであり、それは高次元の場合に $\mathcal{G}$ の自己交差が少ないという性質と対応している。

さらに [4] は、$d=4$ の場合、$p_{2n}^{\mathcal{G}}(0,0)$ の評価を記述する際に、log correction が必要になるということを、P に関して平均を取ったいわゆる annealed な形で証明している。このことから 4 次元の場合の $\mathcal{G}$ の自己交差は、5 次元以上と比べて多くなっていることが annealed レベルでわかる。そして自己交差の増加という性質が X の挙動に影響を与えたといえる。このように $d\leq 4$ の場合は、$\mathcal{G}$ の構造の複雑さから X の解析はより困難なものとなる。

4 主結果の概要

4.1 論文 (i) の結果

(i) において、$d=4$ の場合に、先に述べた [4] における annealed な結果を、quenched な形に改良した。また、これまで数学的に何ら厳密な結果のなかった $d=3$ の場合の考察を行い、$d=3$ の場合の X は $d\geq 4$ の場合とは全く異なり、いわゆる anomarous behavior をしていることを証明した。以下それぞれの場合で得た結果を述べていく。

$d=4$ の場合に次のことを示した。すなわち、ある定数 $c>0$ が存在して、任意の正数 $\delta\in(0,1)$ に対して、P に関して確率 1 で、

$$n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{-\frac{3}{2}-\delta}\leq p_{2n}^{\mathcal{G}}(0,0)\leq cn^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{-\frac{1}{6}} \tag{4.1}$$

が成立することを証明した。この結果から、4 次元の場合の熱核の評価には、quenched レベルで log correction が必要になることがわかる。さらに、$d = 4$ の場合に、$\max_{0\le k\le n}|X_k|$ の漸近挙動を記述するには、やはり 5 次元以上では現れない log correction が必要になることを quenched レベルで証明した。ここで $|\cdot|$ はユークリッド距離を表す。すなわち、ある定数 $c > 0$ が存在して、任意の正数 $\delta \in (0,1)$ に対して、P に関して確率 1 で、

$$n^{\frac{1}{4}}(\log n)^{\frac{1}{24}-\delta} \le \max_{1\le k\le n}|X_k| \le n^{\frac{1}{4}}(\log n)^{\frac{13}{12}+\delta}$$

が十分大きい n に対して成立することを示した。ここで leading order に現れる $\frac{1}{4}$ はシンプルランダムウォークのパスの上で再びシンプルランダムウォークが走っているという事実から自然に現れる exponent である。

$d = 3$ の場合では、熱核の quenched な上からの評価を次のように与えることにより、X の挙動が 4 次元以上の場合とは全く異なることを証明した。すなわち、ある $\gamma > \frac{1}{2}$ が存在して、$p^{\mathcal{G}}_{2n}(0,0) \le n^{-\gamma}$ が成立することを quenched レベルで示した。これは、3 次元の場合の $\mathcal{G}$ は複雑に自己交差しており、直線的な構造ではなく、$\mathbb{Z}^1$ と $\mathbb{Z}^2$ のちょうど間の連結性をもった構造になっていることを厳密に示した結果である。

4.2 論文 (ii) の結果

(ii) では、$d = 4$ の場合に焦点を絞って研究を行った。4 次元の場合に残されている問題のひとつとして、熱核の評価の際に現れる log correction のオーダー（以下、これを簡単に熱核の log のオーダーと呼ぶ）の正確な値を求めるということがある。(4.1) の上下の評価に現れる log のオーダーが異なっているため、(i) の結果から直接、この問題に対して結論を出すことはできない。そこで、(ii) において、熱核の log のオーダーの決定を目標に研究を行った。

まず、熱核の log correction を、有効抵抗を用いて表現することから研究を始めた。正確には、

$$\psi(n) := \frac{E\big(R_{\mathcal{G}}(0,S_n)\big)}{n}$$

を用いて表現することを試みた。ここで、E は P に関する平均を表す。その結果、次の評価を得ることができた。すなわち、P に関して確率 1 で、

$$p^{\mathcal{G}}_{2n}(0,0) \asymp n^{-\frac{1}{2}}\psi(n)^{\frac{1}{2}} \tag{4.2}$$

が成立することを証明した。この結果により、熱核の log correction は $\psi(n)^{\frac{1}{2}}$ に一致することがわかる。

このことから、熱核の log のオーダーを求める問題は、以下のような、$\psi(n)$ のオーダーを求めるという [3] の中で提起された未解決問題に帰着される。

問題 ([3])
$\psi(n) \approx (\log n)^{-\rho}$ が成立するような $\rho > 0$ を決定せよ。

ρ（以下、これを resistance exponent と呼ぶ）については、存在するならば、$\frac{1}{3} \le \rho \le \frac{1}{2}$ であることが証明されている ([11]、[12])。ここで $\frac{1}{3}$ は 4 次元のシンプル RW に対する loop-erasing exponent であり、$\frac{1}{2}$ は cut-time に対する exponent である。このように、ρ については、その存在も解明されていない状態であったが、(ii) において次のことを証明した。

$$\psi(n) \approx (\log n)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.3}$$

この結果は、$\rho = \frac{1}{2}$ であること、言い換えれば 4 次元の resistance exponent は cut-time の exponent と一致することを示している。また、(4.2) と (4.3) を合わせることにより、熱核の log のオーダーが $-\frac{1}{4}$ であると結論できる。これは当初の目標であった問題への解答を与えており、自身の結果 (i) を改良する結果となっている。

5 resistance exponent が 1/2 であることの直感的理解

ここでは、4 次元の resistance exponent が 1/2 となる理由を、直感的に説明することにする。resistance に対するショート則 ([6]) を用いることにより、resistance が下からこのオーダーで評価できることは、cut-time のオーダーを考えれば明らかである。従って、評価すべきことは $E\big(R_{\mathcal{G}}(0,S_n)\big)$ の upper bound である。今、[11] によれば、典型的なパスに対して、n 時までにある cut-time の個数は $n(\log n)^{-\frac{1}{2}}$ なので、要は連続する cut-point と cut-point の間の resistance が、典型的なパスに対しては、定数オーダーであることを示せばよい。

ところが問題なのは、連続する cut-time の間隔で $(\log n)^{\frac{1}{2}}$ オーダーのものが必ず存在するということである。このように長い間隔を持つ区間には、安直に cut 則を用いることができない。ゆえに連続する cut-time でその間隔が長い時、そこではランダムウォークのパスはどのような構造をしているのかを明らかにする必要がある。

本研究のもっとも重要な部分は、cut-time の間のパスの構造を明らかにした点にある。それは以下のような構造をしている。もし連続する二つの cut-timeT_j, T_{j+1} で、$T_{j+1}-T_j$ が大きいとき、その間のランダムウォークのパス $S[T_j, T_{j+1}]$ には、始点 $S(T_j)$ と終点 $S(T_{j+1})$ のそれぞれの近くが交わっており、結果的に大きな loop を有する構造になっていることを証明した。この自己交差により、始点と終点を結ぶ step 数の短いパスが、$S[T_j, T_{j+1}]$ 内に見いだせる。そしてこの事実をもとにして、cut 則を用いれば、$S(T_j)$ と $S(T_{j+1})$ の間の resistance は先に得た短いパスの step 数で上から評価できる。典型的なパスに対しては、そのパスの step 数は定数オーダーでとれるので、結局 $T_{j+1}-T_j$ が大きいときもうまく評価が行えるのである。

以上が resistance exponent が 1/2 であることの証明のアイデアである。もちろんこれは単にアイデアであって、実際には hard な解析を行う必要がある。([15])

6 このモデルに関わる未解決問題

(1) 4 次元の場合も $d \geq 5$ の場合と同様 (詳しくは [4] 参照のこと) に、quenched invariance principle が成立するのか？ただし、上で得た熱核の評価から、scaling には log correction が必要となるはずである。

(2) 3 次元の場合も 4 次元と同様に resistance exponent を考えることができるが、([3]) その値はいくらか？

(3) 3 次元の場合の X の spectral dimension はいくらか？（そもそも存在するのか？）

(4) 3 次元の場合の X の scaling limit は何なのか？

(5) 元々のシンプルランダムウォーク S を定義するグラフを $\mathbb{Z}^d$ ではなく一般のグラフに変えた時、universal に成立する性質は何なのか？ ([2] によれば、再起性は一般のグラフに対して成立する。その他に何かあるか？)

参考文献

[1] M. T. Barlow, A. A. Jarai, T. Kumagai and G. Slade. Random walk on the incipient infinite cluster for oriented percolation in high dimensions. Comm. Math. Phys. 278 (2008) 385-431.

[2] I. Benjamini, O. Gurel-Gurevich and R. Lyons. Recurrence of random walk traces. Ann. Probab. 35 (2007) 732-738.

[3] Burdzy, K.; Lawler, G. F. : Rigorous exponent inequalities for random walks. Journal of Physics A: Mathematical and General, Volume 23, Issue 1, pp. L23-L28 (1990).

[4] Croydon, D. A. Random walk on the range of random walk. J. Stat. Phys. 136 (2009) 349-372.

[5] Durrett, Richard. Probability: theory and examples. Second edition. Duxbury Press, Belmont, CA, 1996. xiii+503 pp. ISBN: 0-534-24318-5

[6] Doyle, Peter G.; Snell, J. Laurie Random walks and electric networks. Carus Mathematical Mono-

graphs, 22. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984.

[7] Dvoretzky, A.; Erdos, P. Some problems on random walk in space. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950. pp. 353–367. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

[8] Hamana, Yuji. An almost sure invariance principle for the range of random walks. Stochastic Process. Appl. 78 (1998), no. 2, 131–143.

[9] Kumagai, Takashi; Misumi, Jun. Heat kernel estimates for strongly recurrent random walk on random media. J. Theoret. Probab. 21 (2008), no. 4, 910–935. bibitemL Lawler, Gregory F. The probability of intersection of independent random walks in four dimensions. Communications in Mathematical Physics, Volume 86, (1982), Issue 4, pp.539-554.

[10] Lawler, Gregory F. Intersections of random walks. Probability and its Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1991. (soft-cover version)

[11] Lawler, Gregory F. Escape probabilities for slowly recurrent sets. Probab. Th. and Rel. Fields 94, (1992), 91-117.

[12] G. F. Lawler. The logarithmic correction for loop-erased walk in four dimensions. Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993). J. Fourier Anal. Appl. 1995, Special Issue, 347-361.

[13] Manna, S. S.; Guttmann, A. J.; Hughes, B. D. Diffusion on two-dimensional random walks. Phys. Rev. A (3) 39 (1989), no. 8, 4337–4340.

[14] Shiraishi, Daisuke. Heat kernel for random walk trace on $\mathbb{Z}^3$ and $\mathbb{Z}^4$. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., to appear.

[15] Shiraishi, Daisuke. Exact value of the resistance exponent for four dimensional random walk trace. preprint