

# 輪投げ絡み目の完全分離数について

清水理佳\*

大阪市立大学大学院理学研究科

## 概要

絡み目に対して、輪投げという操作と完全分離数という絡み目不変量を定義する。任意の結び目から  $r$  回の輪投げにより得られる絡み目  $L$  は、完全分離数がちょうど  $r$  であることを示す。特に、任意の結び目から  $r$  回の成分輪投げにより得られる絡み目  $L$  は、完全分離数が  $r$  の、代数的には完全分離可能な絡み目である。さらに、絡み目解消数が完全分離数よりも大きくなる例も考える。

## 1 はじめに

絡み目 (2 章で定義する) の分離性は結び目理論における基本的で興味深い問題のひとつである。例えば、絡み目の多項式不変量において、分離可能な絡み目のアレクサンダー多項式やコンウェイ多項式 (4 章で定義する) は 0 である。また、ジョーンズ多項式やスケイン多項式は分離可能な絡み目において分離和に関する公式を持つ。さらに、結び目理論における絡み目の分離性は、他分野への応用も考えられ、研究されている。例えば、河内によってプリオンたんぱく質を空間グラフとみなした数学的モデルが導入され [2]、吉田はその分離性を調べた [4]。これは狂牛病で有名なプリオン病の研究につながると見込まれている。また、心理学への応用においても、絡み目の分離性は重要な役割を果たしている [6], [2]; ある構成方法により、人の心理状態を結び目、 $n$  人の心理状態を  $n$  成分絡み目として記述したとき、このモデルにおいて自己救済関係 (いわゆる人間関係の一種) を調べるためには、絡み目の分離性を調べればよい。

アダムスは 2 成分絡み目  $L$  に対し、 $L$  が分離可能からどれくらい離れているかを表す分離数 (splitting number) を定義した [5]。本稿では、 $n$  成分絡み目  $L$  に対し ( $n = 2, 3, 4, \dots$ )、 $L$  が完全分離可能からどれくらい離れているかを表す完全分離数 (complete splitting number)  $\text{split}(L)$  を定義する。自明な絡み目は完全分離可能であるから、絡み目  $L$  の完全分離数  $\text{split}(L)$  と絡み目解消数 (2 章で定義する)  $u(L)$  において、 $\text{split}(L) \leq u(L)$  が成り立つ。(等号が成り立たない場合について、6 章で考える。) 本稿で、絡み目図式と絡み目に対して輪投げ (lassoing) という操作を定義する。絡み目図式における輪投げとは、図式の交差点で交差交換を行い、さらにループを交代的に加える、という局所変形のことである (図 1)。(完全分離可能、完全分離数および輪投げについては、第 3 章で詳しく説明する。) 次の定理が成り立つ:

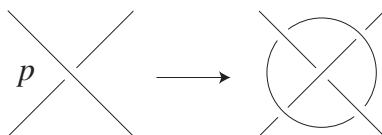


図 1

\* 日本学術振興会特別研究員 (DC2), shimizu1984@gmail.com

定理 1.1. 結び目  $K$  から  $r$  回 ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) の輪投げにより得られる絡み目  $L$  は, 完全分離数が  $r$  である.

証明は 5 章で与える. 自己交差点に輪投げすることを, 成分輪投げ (component-lassoing) するという. 定理 1.1 から, 次の系が成り立つ:

系 1.2. 結び目  $K$  から  $r$  回 ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) の成分輪投げによって得られる  $(r + 1)$  成分絡み目  $L$  は, 代数的には完全分離可能であり, 完全分離数は  $r$  の絡み目である.

コンウェイ多項式  $\nabla(L; z)$  (4 章で定義する) が 0 でない  $r$  成分絡み目  $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_r$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) から  $\ell$  回の輪投げによって, コンウェイ多項式が 0 でない, 代数的に完全分離可能 (第 3 章で定義する) な  $(r + \ell)$  成分絡み目を構成することができる. ただし,  $\ell = \sum_{i < j} |\text{Link}(L_i, L_j)|$ . コンウェイ多項式  $\nabla(K; z)$  が 0 でない  $s$  成分絡み目  $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) から,  $(\ell + u)$  回の輪投げによって, コンウェイ多項式が 0 でない, 代数的に完全分離可能で, 全ての成分がそれぞれ自明である  $(s + \ell + u)$  成分絡み目を構成することができる. ただし,  $\ell = \sum_{i < j} |\text{Link}(K_i, K_j)|$ ,  $u = \sum_{i=1}^s u(K_i)$ . これらの事実は, 輪投げの過程に交差交換が含まれることと, 4 章で述べる輪投げに関するコンウェイ多項式の性質からわかることである. 定理 1.1, 系 1.2 は次のように拡張できる [10]:

定理 1.3. コンウェイ多項式が 0 でない  $s$  成分絡み目  $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) から  $r$  回 ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) の輪投げによって得られる絡み目  $L$  において, 次の不等式が成り立つ:

$$r + \text{split}(K) \geq \text{split}(L) \geq r + s - 1.$$

系 1.4. 完全分離数が  $s - 1$  の  $s$  成分絡み目  $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) と整数  $r \geq \ell + u$  において,  $K$  から  $r$  回の輪投げによって得られる絡み目  $L$  で, 代数的に完全分離可能で, 全ての成分がそれぞれ自明であり, 完全分離数が  $r + s - 1$  であるものが存在する. ただし,  $\ell = \sum_{i < j} |\text{Link}(K_i, K_j)|$ ,  $u = \sum_{i=1}^s u(K_i)$ .

また, 定理 1.3 の対偶として次の系が成り立つ:

系 1.5.  $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_s$  を  $s$  成分絡み目とする. このとき,  $\text{split}(K) < s - 1$  ならば,  $\nabla(K) = 0$ .

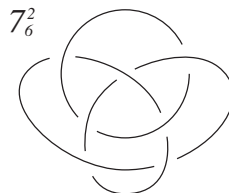


図 2

定理 1.1 および系 1.2 の例をひとつ挙げる. 図 2 に描かれた  $7_6^2$  という名前の絡み目は, 図 5 左に描かれた三葉結び目という名前の結び目から, 1 回の輪投げによって得られる絡み目である. 絡み目  $7_6^2$  は代数的に完全分離可

能であるが、完全分離数は 1 である。また  $7_6^2$  の絡み目解消数は 2 である ([9])。すなわち、 $\text{split}(7_6^2) < u(7_6^2)$ 。ここで、 $7_6^2$  の各結び目成分はそれぞれ自明な結び目であることに注意しておく。アダムスによっても、それぞれの成分が自明な 2 成分絡み目  $L$  で、 $\text{split}(L) < u(L)$  となる絡み目が存在することが示されている [5]。任意の正の整数  $r$  と、中西指数  $e(K) > 2r$  を持つ任意の結び目  $K$  に対し、 $r$  回の輪投げをして得られる  $(r+1)$  成分絡み目  $L$  は  $\text{split}(L) < u(L)$  を満たすことを、6 章で示す。

## 2 絡み目について

まずこの章で、絡み目の定義や同値性について説明する。 $r$  成分の絡み目 (link)  $L$  とは、 $S^3$  に埋め込まれた  $r$  個の単純閉曲線のことである。特に、1 成分の絡み目のことを結び目 (knot)  $K$  という。絡み目  $L$  をある平面に射影したものを  $L$  の射影図 (projection) という。ただし交点は二重点のみ許され、横断的に交わるものとする。 $L$  の射影図の各交点に、上下の情報を図 2 のように与えたものを、 $L$  の図式 (diagram)  $D$  という。上下の情報が与えられた交点のことを交差点 (crossing point) という。交差点  $p$  が同じ結び目成分どうしの弧の交差を表すとき、 $p$  は自己交差 (self-crossing) であるという。交差点をひとつも持たない絡み目図式  $D$  を自明絡み目図式 (trivial link diagram) といい、自明絡み目図式  $D$  を持つ絡み目  $L$  のことを自明絡み目 (trivial link) という。ひとつの絡み目に対して図式は無数に存在し、一方図式はただひとつの絡み目を表す。ふたつの図式  $D, D'$  において、一

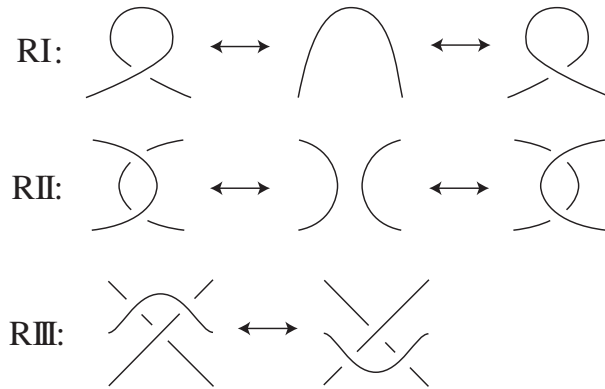


図 3

方の図式を有限回の同位変形と図 3 に示されたライデマイスター移動 (Reidemeister move) RI ~ RIII によって、もう一方の図式に変形できるとき、 $D$  と  $D'$  は同値 (equivalent) であるという。ふたつの絡み目  $L$  と  $L'$  において、それらの図式が同値であるとき、 $L$  と  $L'$  は同値であるという。絡み目不変量 (link invariant) とは、同値な絡み目に対して同じ値をとる絡み目の集合からの写像である。絡み目不変量の代表的な例として、絡み目解消数を見てみよう。 $D$  を絡み目  $L$  の図式とする。 $D$  から、自明絡み目を表す図式を得るために必要な交差交換の最小回数を、 $D$  の絡み目解消数 (unknotting number) といい、 $u(D)$  で表す。ただし、交差交換 (crossing change) とは、図式のある交差点で、図 4 のように上下の情報を入れ替える操作のことである。絡み目  $L$  の全ての図式  $D$  に

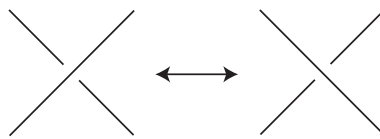


図 4

おける  $u(D)$  の最小値  $u(L)$  のことを  $L$  の絡み目解消数 (unlinking number) という。例えば、三葉結び目  $K$  の

絡み目解消数 (結び目に対しては結び目解消数ともいう) は,  $u(K) = 1$  である (図 5).

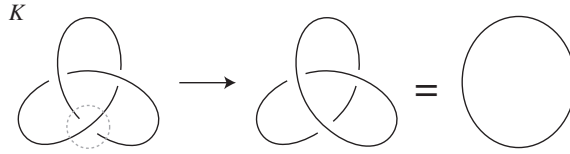


図 5

### 3 輪投げと完全分離数

この章では, 絡み目の完全分離数と輪投げを定義する.  $r$  成分絡み目  $L$  からいくつかの成分だけを取り出したものを  $L$  の部分絡み目 (sublink) という.  $L = L^1 \cup L^2 \cup \dots \cup L^r$  を  $r$  個の部分絡み目  $L^i$  から成る絡み目とする. 絡み目  $L$  が部分絡み目  $L^1, L^2, \dots, L^r$  に分離可能 (splittable) であるとは,  $S^3$  内の互いに交わらない 3 次元球体  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) で  $L^i \subset B_i$  とできることである. 例えば図 6 において, 絡み目  $M$  は  $M_1$  と  $M_2$  に分離可能であり,  $N$  は  $N_1$  と  $N_2$  に分離可能でない. 絡み目  $L$  が, 単に分離可能であるとは,  $L$  をあるふたつの空でない部分絡み目  $L^1$  と  $L^2$  に分離可能であることをいう. 例えば図 6 右端の  $F$  により表される絡み目は分離可能である.  $r$  成分絡み目  $L$  が全ての  $r$  個の結び目成分に分離可能であるとき,  $L$  は完全分離可能 (completely splittable) であるという. 特に, 結び目は分離不可能な絡み目とみなされるが, 完全分離可能な絡み目である.

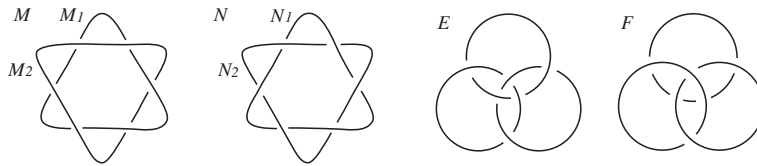


図 6

絡み目  $L$  が代数的に完全分離可能であるとは,  $L$  の全ての 2 成分  $K_i$  と  $K_j$  の絡み数  $\text{Link}(K_i, K_j)$  (絡み数の定義については [1] 参照) が 0 であることである. 例えば, 図 6 の絡み目  $E$  は, 完全分離可能ではないが, 代数的には完全分離可能である. 絡み目図式  $D$  の完全分離数  $\text{split}(D)$  とは,  $D$  から完全分離可能な絡み目を表す絡み目図式を得るために必要な交差交換の最小回数のことである. 例えば図 6 右端の絡み目図式  $F$  は,  $\text{split}(F) = 1$  である. 図式の完全分離数は, 絡みひずみ度 (warp-linking degree) という計算しやすい図式の不変量で上から評価できる:  $\text{split}(D) \leq ld(D)$  [11]. 絡み目  $L$  の完全分離数  $\text{split}(L)$  とは, 完全分離可能な絡み目を得るために必要な交差交換の, 全ての図式における最小回数である.

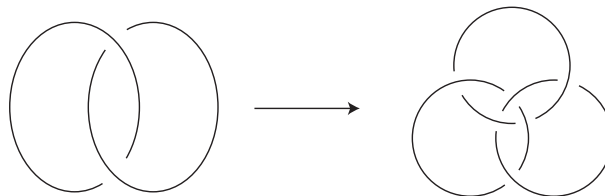


図 7

絡み目図式  $D$  のある交差点  $p$  において次のような操作を行う: まず  $p$  で交差交換をして, 次にこの交差点の周りにループを代的に加える (図 1 参照). この操作によって得られる図式  $D'$  は,  $D$  から  $p$  での輪投げによって

得られるという。  $L'$  を図式  $D'$  により表される絡み目とすると、  $L'$  は  $L$  から輪投げによって得られるという。例えば、ホップ絡み目 (図 7 左) から輪投げによってボロミアン環 (図 7 右) を得る。  $r$  回の輪投げとは、絡み目の図式を自由に取り替えながら  $r$  回輪投げすることをいう。例えば、図 8 の絡み目  $L$  は、自明な結び目から 2 回の輪投げによって得られる絡み目である。輪投げは図式の選び方と交差点の選び方によるものである。

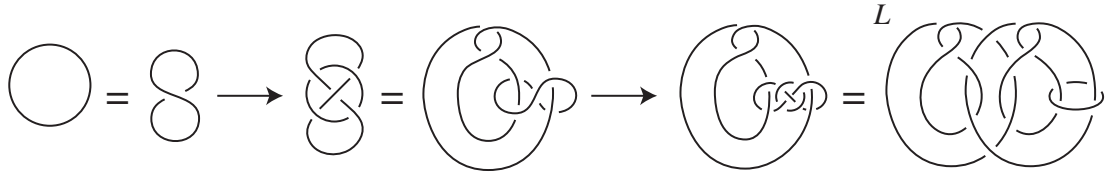


図 8

### 4 コンウェイ多項式

この章では、コンウェイ多項式を説明し、輪投げに関するコンウェイ多項式の性質をみる。絡み目図式  $D$  向きを与える。ある交差点  $p$  が図 9 左のような交差の向きの位置関係であるとき  $D$  を  $D_+$ 、図 9 中央のような位置関係であるとき  $D$  を  $D_-$  と表す。交差点  $p$  の周りにおいて、  $D$  を図 9 における他のふたつに置き換えた図式と合わせた 3 対  $(D_+, D_-, D_0)$  を、  $D$  の  $p$  におけるスケイントリプル (skein triple) という。向き付けられた絡み

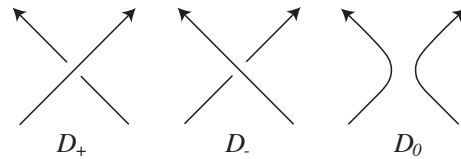


図 9

目  $L$  の図式  $D$  において、  $D$  のコンウェイ多項式 (Conway polynomial)  $\nabla(D; z)$  とは、次の条件 (∇0) ~ (∇2) を満たす、  $z$  の負ベキを持たない整数係数多項式のことである [3]:

- (∇0)  $\nabla(D; z)$  は  $D$  のライデマイスター移動 RI ~ RIII で不変である。
- (∇1) 自明結び目図式  $O$  において、  $\nabla(O; z) = 1$ 。
- (∇2)  $D$  の任意の交差点  $p$  におけるスケイントリプル  $(D_+, D_-, D_0)$  に対して、

$$\nabla(D_+; z) - \nabla(D_-; z) = z\nabla(D_0; z)$$

が成り立つ。

条件 (∇0) により、コンウェイ多項式は絡み目不変量であるから、  $\nabla(D; z)$  を  $\nabla(L; z)$  と書き改め、これを  $L$  のコンウェイ多項式と呼ぶ。輪投げにおけるコンウェイ多項式について、次の補題が成り立つ:

補題 4.1.

$$\begin{aligned} \nabla\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}; z\right) &= -z^3 \nabla\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}; z\right), & \nabla\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \\ \swarrow \end{array}; z\right) &= -z^3 \nabla\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}; z\right), \\ \nabla\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \\ \swarrow \end{array}; z\right) &= z^3 \nabla\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}; z\right), & \nabla\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}; z\right) &= z^3 \nabla\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}; z\right). \end{aligned}$$

証明. 図 10 のように展開することによって, ひとつ目の等式を得る.

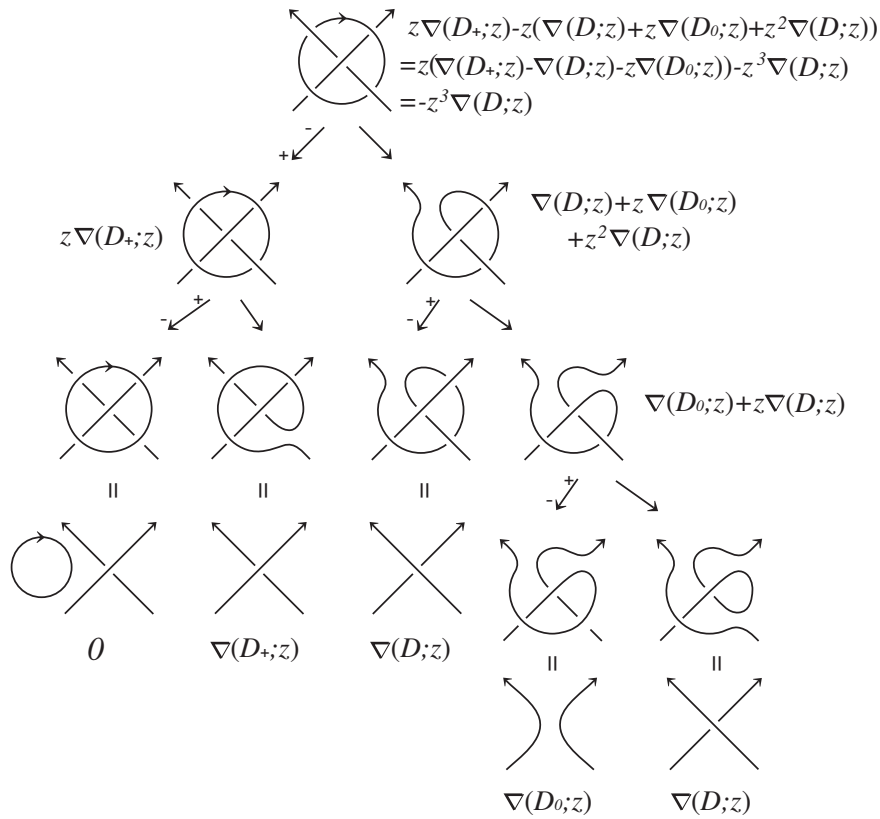


図 10

他の等式も同様にして得られる.

□

例 4.2. 図 11 の向き付けられた絡み目  $L$  は, 三葉結び目に 2 回の輪投げをして得られたものである. よって,  $\nabla(L) = z^3 \times z^3 \times \nabla(3_1) = z^6(1 + z^2)$  を得る. ただし,  $3_1$  は三葉結び目を表す.

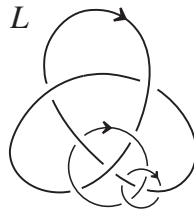


図 11

補題 10 から次のことがわかる:

系 4.3. コンウェイ多項式が 0 でない絡み目  $L'$ , 特に任意の結び目  $K$  から  $r$  回の輪投げ ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) によって得られる絡み目  $L$  のコンウェイ多項式もまた, 0 でない.

## 5 定理 1.1 の証明

この章の目的は定理 1.1 の証明であるが, その前に [7] に基づき証明に必要な言葉を用意しておく. 整数係数ローラン多項式環  $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  に対し,  $\Lambda$  の部分集合  $S \subset \Lambda - \{0\}$  が次の三つを満たすとき,  $S$  は  $\Lambda$  の *multiplicative set* であるという: 単元  $\pm t^i$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) は  $S$  に属する, 任意の  $S$  の元  $g$  と  $g'$  の積  $gg'$  もまた  $S$  に属する,  $S$  の任意の元  $g$  の素因数はみな  $S$  に属する.  $\Lambda$  と  $\Lambda$  の *multiplicative set*  $S$  に対して,  $\Lambda_S = \{f/g \in Q(\Lambda) \mid f \in \Lambda, g \in S\}$  は  $\Lambda$  の商体  $Q(\Lambda)$  の部分環である.  $H$  を有限生成  $\Lambda$ -加群とし,  $H_S$  を  $H$  と  $\Lambda_S$  の  $\Lambda$  上のテンソル積  $H \otimes_{\Lambda} \Lambda_S$  とする. ここで  $H_S$  は  $\Lambda_S$ -加群である. そこで,  $e_S(H)$  を  $H_S$  の  $\Lambda_S$ -生成元の個数の最小値とし, これを  $H$  の  $\Lambda_S$ -階数 ( $\Lambda_S$ -rank) と呼ぶ. ただし,  $H = 0$  のときは  $e_S(H) = 0$  とする.  $L$  を  $S^3$  内の向き付けられた絡み目とし,  $E(L) = cl(S^3 - L)$  を  $L$  のコンパクトな外部とする.  $L$  の各メリディアンを 1 に送る全射  $\gamma_L : \pi_1(E(L)) \rightarrow \mathbb{Z}$  から得られる無限巡回被覆 ([3] 参照)  $\tilde{E}(L) \rightarrow E(L)$  を考える.  $H_1(\tilde{E}(L))$  は有限生成  $\Lambda$ -加群である.  $e_S(H_1(\tilde{E}(L)))$  を  $e_S(L)$  と書く. ここで,  $S$  を  $\Lambda$  の単元集合  $\{\pm t^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  としてとると,  $e_S(L)$  は中西指数 (Nakanishi's index)  $e(L)$  と等しくなる.  $L$  と  $L'$  を成分数の等しい絡み目とする.  $L$  と  $L'$  の  $X$ -距離, すなわち  $L$  から  $L'$  を得るために必要な交差交換の最小回数を  $d^X(L, L')$  で表す. 河内による [7] の定理 2.3 から直ちに次の不等式が成り立つ:

$$d^X(L, L') \geq |e_S(L) - e_S(L')|. \quad (5.1)$$

この不等式を使って定理 1.1 を示す.

定理 1.1 の証明. 結び目  $K$  から  $r$  回の輪投げによって得られる絡み目を  $L$  とする ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ).  $L'$  を,  $L$  から最小回数である  $m$  回の交差交換によって得られる完全分離可能な絡み目とする. すなわち,  $m = \text{split}(L) = d^X(L, L')$ . ここで, *multiplicative set* を  $S = \Lambda - \{0\}$  ととる.  $L'$  は完全分離可能な  $r+1$  成分絡み目であるから,

$$e_S(L') = r. \quad (5.2)$$

系 4.3 より  $L$  のコンウェイ多項式は 0 でなく, よってアレクサンダー多項式も 0 でないから,

$$e_S(L) = 0. \quad (5.3)$$

式 (5.2), (5.3) と  $d^X(L, L') = \text{split}(L)$  を不等式 (5.1) に代入することにより, 次を得る:

$$\text{split}(L) \geq r.$$

また,  $L$  は  $r$  回の輪投げによって得られたものであったから,

$$r \geq \text{split}(L).$$

よって,

$$\text{split}(L) = r.$$

□

## 6 非自明性

定理 1.1 により, 結び目  $K$  に  $r$  回の輪投げをして得られた絡み目  $L$  の完全分離数はちょうど  $r$  であった ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ). この  $L$  から,  $r$  回の交差交換によって得られる完全分離可能な絡み目の, 各結び目成分はどのようなになっているのだろうか. ほどけているのか, それとも絡んでいるのか. 次のことが成り立つ:

定理 6.1. 絡み目  $L$  が, 中西指数  $e(K) > 2r$  となる結び目  $K$  から  $r$  回の輪投げによって得られた絡み目であるとき ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ),  $L$  の絡み目解消数は  $u(L) > r$  である. さらに,  $r$  回の輪投げが全て成分輪投げであるならば,  $L$  は代数的に完全分離可能で絡み目解消数が  $u(L) > r$  の絡み目である.

証明. 中西指数  $e(K) > 2r$  となる結び目  $K$  から  $r$  回の輪投げによって得られた絡み目  $L$  は定理 1.1 より完全分離数が  $r$  であるから,  $r$  回の交差交換により  $L$  から得られる完全分離可能なある絡み目を  $L_0 = K_1 + K_2 + \dots + K_{r+1}$  とおく. 整数係数ローラン多項式  $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  の multiplicative set  $S$  を  $\Lambda$  の単元集合としてとると, 5 章で述べたように,  $e_S(L)$  は中西指数  $e(L)$  と等しくなる. 完全分離可能なこの絡み目  $L_0 = K_1 + K_2 + \dots + K_{r+1}$  を, 自明な  $(r+1)$  成分絡み目と  $(r+1)$  個の結び目との連結和とみなすことにより, 次を得る:

$$\begin{aligned} H_1(\tilde{E}(L_0)) &\cong H_1(\tilde{E}(O^{r+1})) \oplus H_1(\tilde{E}(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_{r+1})) \\ &\cong \Lambda^r \oplus H_1(\tilde{E}(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_{r+1})). \end{aligned}$$

また [8] より,  $e(L_0) = r + e(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_{r+1})$  である. これを不等式 (5.1) に代入することにより,

$$d^X(L, L_0) \geq |e(L) - e(L_0)| \geq e(L) - r - e(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_{r+1}).$$

ここで,  $d^X(L, L_0) = \text{split}(L) = r$  であるから,

$$r \geq e(L) - r - e(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_{r+1}). \quad (6.1)$$

次に, 上で定めた  $L$  に対して図 12 のように  $r$  回, 輪投げと逆の操作をして得られる完全分離可能な絡み目  $K + O^r$  を考える.

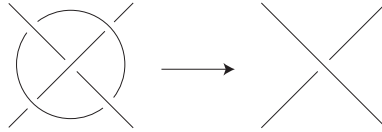


図 12

上と同様に, これを連結和  $K + O^r = O^{r+1} \# K$  とみなすことにより,

$$H_1(\tilde{E}(L_0)) \cong \Lambda^r \oplus H_1(\tilde{E}(K))$$

を得る. そして [8] より  $e(K + O^r) = r + e(K)$  であり, 同様にして次を得る:

$$r \geq r + e(K) - e(L). \quad (6.2)$$

不等式 (6.1) と (6.2) を足し合わせることで, 次を得る:

$$2r \geq e(K) - e(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_{r+1}).$$



よって,

$$u(L_0) \geq u(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_{r+1}) \geq e(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_{r+1}) \geq e(K) - 2r.$$

したがって,  $e(K) > 2r$  のとき  $L_0$  は非自明な絡み目である.  $\square$

この定理より, 中西指数が十分大きな結び目を選べば, それに  $r$  回輪投げをして得られる絡み目  $L$  の絡み目解消数は完全分離数よりも大きくなること, すなわち  $\text{split}(L) < u(L)$  がわかる. 例を挙げる.

例 6.2. 図 13 に描かれた, 三葉結び目の  $(2r + 1)$  個の連結和である結び目  $K$  は, 中西指数が  $e(K) = 2r + 1$  である.  $K$  に  $r$  回の輪投げをどのように行っても, 得られる絡み目の完全分離数は定理 1.1 から  $r$  であるが, 絡み目解消数は, 定理 6.1 により  $r$  よりも大きくなる.

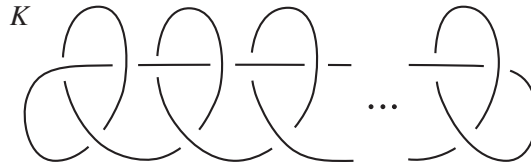


図 13

## 謝辞

城崎新人セミナーに運営委員として今年も参加させていただき, みなさまと出会い, あるいは再会し, 楽しく有意義な 5 日間を過ごすことができました. どうもありがとうございました.

## 参考文献

- [1] 大城佳奈子, 張娟姫, 清水理佳, 鈴木咲衣: Alexander 多項式について, 第 4 回琵琶湖若手数学者勉強会報告集.
- [2] 河内明夫: 結び目理論の科学への応用—プリオン分子モデルとところのモデルを中心として, 数学通信, 14-4 (2010), 26-45.
- [3] 河内明夫, レクチャー結び目理論, 共立出版 (2007).
- [4] 吉田佳代, プリオン蛋白質の数学的モデルについて, 平成 21 年度大阪市立大学理学研究科数物系専攻修士論文.
- [5] C. Adams: Splitting versus unlinking, *J. Knot Theory Ramifications*. **5** (1996), 295-299.
- [6] A. Kawauchi: A knot model in psychology, *Knot Theory for Scientific Objects, OCAMI Studies* **1** (2007), 129-141, Osaka Municipal Univ. Press.
- [7] A. Kawauchi: Distance between links by zero-linking twists, *Kobe J. Math.* **13** (1996), 183-190.
- [8] A. Kawauchi: On the integral homology of infinite cyclic coverings of links, *Kobe J. Math.* **4** (1987), 31-41.
- [9] P. Kohn: Unlinking two component links, *Osaka J. Math.* **30** (1993), 741-752.
- [10] A. Shimizu: The complete splitting number of a lassoeed link, *arXiv:math. GT/1006.5563v2* (2010).
- [11] A. Shimizu: The warping degree of a link diagram, to appear in *Osaka J. Math.*