多重ゼータ函数の特殊函数論的側面

渋川元樹*

京都大学大学院理学研究科数学数理解析専攻

この度は第 7 回城崎新人セミナーに参加させて頂きありがとうございました. 水虫と蟹[*1]には苦しめられましたが, 素晴らしい環境でたくさんの優秀な方々にお会いすることができ, 大変有意義な時間を過ごせました. この報告集には自分の研究について報告させて頂こうと思います.

1 はじめに

特殊函数の研究の歴史は古い. その古さと, また博物学的現象論的な色合いが強かった為か, 特に 20 世紀の前半から中頃にかけては余り脚光を浴びなかったが, 近年では, 表現論, 代数幾何, 微分方程式論等の理論を用いることで q 特殊函数, テータ函数, 超幾何函数,Painleve 函数といった古来より知られていた有名な函数達を系統的統一的に扱えるようになってきた. 物理等からの要請合わさって, 特殊函数論は再び数学の表舞台に立ち, 今や理論, 個別の計算例共にその蓄積は膨大である.

しかし一方で未だに余り省みられることがない函数やそれにまつわる結果も少なくない. ガンマ函数やゼータ函数もそういった函数の一つである[*2]. これら二つに共通し, また上で述べたような他の有名な特殊函数と異なる点は, 表現論, 代数幾何, 微分方程式論等といった理論に載らず, 系統的に扱うことが出来なかったという点である. つまり従来の代数的, 幾何的, 解析的な描象とは馴染まない対象物であったがゆえに, 基本的な函数にも関わらずその体系的な研究が行われてこなかったのである. 逆に言えばそうであるがゆえに, まだまだ未知で重要な結果がそこに埋もれていると期待される.

そのような背景で筆者が特殊函数論において重要になると考え研究しているのは Barnes の多重ガンマ, 多重ゼータ函数の研究である. これは 20 世紀初等の Barnes の研究に遡るもので一時期は忘れられていたが, 1970 年代になり数論との絡みで再び脚光を浴びた. 1990 年代後半から 2000 年代に入ってからは, まだまだ現象論的散発的なものであるが, 可積分系や差分方程式の解の構成法などの要請を受け研究がなされている. にもかかわらず, 多重ガンマ函数自身について得られている結果自体は 100 年前の Barnes の結果と余り大差はない状況が長らく続いていた (最近新しい結果が得られつつある). それを越える結果についても証明等の見通しが余り良くなく, また広く応用に耐えうるだけの汎用性には乏しい.

その一つの原因はやはり多重ガンマ函数が本質的に難しい対象であるからである. そこで Barnes の意味での多重ガンマ, 多重ゼータそれ自体を扱うのではなく, それらを適当に組み合わせたものを扱うと非常に議論が簡明になることに気付いた[*3]. もはやそれはガンマ函数ではないが（三角函数やテータ函数に近い）, このようにすることで扱いやすい形になり, また他の特殊函数との関連が鮮明になり, 応用として重要な結果も得ることもできる. 多重ガンマを組み合わせる発想自体は始祖 Barnes 以来多くの研究者がやってきたことではあるが, 多重ガンマ、Barnes ゼータから始めるのではなく, 出発点そのものをそれらを組み合わせたもの（特にゼータを

* shibugen@math.kyoto-u.ac.jp

*1 カニはもういいカニ $\cdots$.

*2 ガンマ函数は本質的にゼータ函数の微分の零値なので特殊函数論的にはある意味この二つは一対一に対応する.

*3 ガンマ函数よりそれらを組み合わせた三角函数の方が簡単で性質が良くなることに事情は似ている.

Barnes ゼータに分解しないでそのまま扱う）の方に置いた発想はあまりないように思う.

本稿では, この観点から得られた諸結果の紹介及びその為に必要になるいくつかの事項と, 応用として古典的に有名な結果である Dedekind のエータ函数の反転公式の証明とその他に証明できた命題の紹介を行う.

2 Barnes ゼータ

Barnes の多重 $(r+1$ 重$)$ ゼータ函数を以下で与える.

$$\zeta_{r+1}(s,\,z\mid\omega_0,\,\underline{\omega}):=\sum_{m_0,\cdots,m_r=0}^{\infty}\frac{1}{(z+m_0\omega_0+m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r)^s},\tag{2.1}$$

ただし, $\Re(s)>r+1,\underline{\omega}:=(\omega_1,\cdots,\omega_r)$ とし, $z,\omega_0,\,\underline{\omega}$ は片側条件 $(z,\omega_0,\,\omega_1,\cdots,\omega_r$ が, 原点を通るある直線で分けられた二つの領域のうちのどちらか片方に全てある$)$ を満たしているとする (以下特に断らない限り $z,\omega_k(\forall k)$ は片側条件を満たしているとする). また偏角は

$$-\pi\le\arg(z+m_0\omega_0+m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r)<\pi$$

とする.

注意 2.1. 片側条件を満たしているとき $s>r+1$ で $\zeta_{r+1}(s,\,z\mid\omega_0,\,\underline{\omega})$ を定義する級数は絶対収束する.

Barnes ゼータについてはコンタワー積分を用いた解析接続が有名だが, ここでは余り知られていない Euler-Maclaurin 和公式 (E-M 公式) を用いた表示式とそれによる全 s 平面への解析接続を与えよう.

定理 2.2. M を $M>r+1-\Re(s)$ なる自然数とするとき (以下特に断らない限りは M は自然数) $r+1$ 重ゼータは次の表示を持つ.

$$\begin{aligned}\zeta_{r+1}(s,z\mid\omega_0,\,\underline{\omega})=&\frac{1}{\omega_0(s-1)}\zeta_r(s-1,z\mid\underline{\omega})+\frac{1}{2}\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega})\\&+\sum_{k=1}^{M-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(s)_k\omega_0^k\zeta_r(s+k,z\mid\underline{\omega})\\&-\frac{(s)_M}{M!}\omega_0^M\int_0^\infty B_M(t-[t])\zeta_r(s+M,z+t\omega_0\mid\underline{\omega})dt,\end{aligned}\tag{2.2}$$

但し $B_k(x)$, B_k はそれぞれ以下で与えられる Bernoulli 多項式, Bernoulli 数とする.

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}:=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(x)\frac{t^k}{k!}.\tag{2.3}$$

$$B_k:=B_k(1).\tag{2.4}$$

この表示により $\zeta_{r+1}(s,z\mid\omega_0,\,\underline{\omega})$ は全 s 平面に有理型に解析接続される.

証明. r についての induction を用いる. $r=0$ の時, まずは $\Re(s)>1$ としておく. この時 Euler-Maclaurin 和公式 (E-M 公式)([AIK] 参照)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}f(k)=&\int_0^N f(t)dt+\frac{1}{2}(f(N)+f(0))\\&+\sum_{k=1}^{M-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(f^{(k)}(N)-f^{(k)}(0))\\&-\frac{(-1)^M}{M!}\int_0^N B_M(t-[t])f^{(M)}(t)dt,\end{aligned}\tag{2.5}$$

の f として

$$f(t \mid s, z \mid \omega_0) := (t\omega_0 + z)^{-s} \tag{2.6}$$

を取ると

$$\frac{\partial^k f}{\partial t^k} = (-1)^k (s)_k \omega_0^k (t\omega_0 + z)^{-(s+k)},$$
$$\int_0^N f(t \mid s, z \mid \omega_0) dt = \frac{1}{\omega_0(1-s)}((N\omega_0 + z)^{1-s} - z^{1-s}),$$

となるので

$$\begin{aligned}\sum_{m_0=0}^{N} \frac{1}{(z + m_0\omega_0)^s} = &\frac{1}{\omega_0(1-s)}((N\omega_0 + z)^{1-s} - z^{1-s}) + \frac{1}{2}((N\omega_0 + z)^{-s} + z^{-s}) \\ &+ \sum_{k=1}^{M-1} \frac{(-1)^k B_{k+1}}{(k+1)!} (s)_k \omega_0^k ((N\omega_0 + z)^{-(s+k)} - z^{-(s+k)}) \\ &- \frac{(s)_M}{M!} \omega_0^M \int_0^N B_M(t - [t])(t\omega_0 + z)^{-(s+M)} dt.\end{aligned}$$

$\Re(s) > 1$ だったので $N \to \infty$ とすると,

$$\begin{aligned}\zeta_1(s, z \mid \omega_0) = &\frac{1}{\omega_0(s-1)} z^{1-s} + \frac{1}{2} z^{-s} + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} (s)_k \omega_0^k z^{-(s+k)} \\ &- \frac{(s)_M}{M!} \omega_0^M \int_0^\infty B_M(t - [t])(t\omega_0 + z)^{-(s+M)} dt.\end{aligned} \tag{2.7}$$

但し,

$$(-1)^k B_{k+1} = -B_{k+1},$$

また $B_M(t - [t])$ が $[0, 1]$ 上の連続函数であり,

$$\int_0^\infty |(t\omega_0 + z)^{-(s+M)}| dt < \infty,$$

なることを用いた. またこの表示は M を任意の自然数にとれるので, 特に $M > 1 - \Re(s)$ と取ればこの表示により $\zeta_1(s, z \mid \omega_0)$ は全 s 平面に有理型に解析接続される.

r の時, E-M 公式による表示を持ち, それにより全 s 平面に解析接続されているとし, $\Re(s) > r + 1$ とする (また $\zeta_{r+1}(s, z \mid \omega_0, \underline{\omega})$ においてパラメータ ω_k 同士は互いに入れ替えてよいので, 以下 ω_0 と ω_r を入れ替えて議論する).

$$f(t \mid s, z \mid \omega_0, \underline{\omega}) := \zeta_r(s, t\omega_0 + z \mid \underline{\omega}) \tag{2.8}$$

とすると,

$$\frac{\partial^k f}{\partial t^k} = (-1)^k (s)_k \omega_0^k \zeta_r(s + k, t\omega_0 + z \mid \underline{\omega}),$$
$$\int_0^N f(t \mid s, z \mid \omega_0, \underline{\omega}) dt = \frac{1}{\omega_0(1-s)} (\zeta_r(s - 1, N\omega_0 + z \mid \underline{\omega}) - \zeta_r(s - 1, z \mid \underline{\omega})).$$

よって E-M 公式より

$$\begin{aligned}\zeta_{r+1}(s,z\mid\omega_0,\underline{\omega}) &= \frac{1}{\omega_0(s-1)}\zeta_r(s-1,N\omega_0+z\mid\underline{\omega})-\zeta_r(s-1,z\mid\underline{\omega})) \\ &+\frac{1}{2}(\zeta_r(s,N\omega_0+z\mid\underline{\omega})+\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega})) \\ &+\sum_{k=1}^{M-1}\frac{(-1)^k B_{k+1}}{(k+1)!}(s)_k\omega_0^k(\zeta_r(s+k,N\omega_0+z\mid\underline{\omega})-\zeta_r(s+k,z\mid\underline{\omega})) \\ &-\frac{(s)_M}{M!}\omega_0^M\int_0^N B_M(t-[t])\zeta_r(s+M,t\omega_0+z\mid\underline{\omega})dt.\end{aligned}$$

今 $\Re(s)>r+1$ なので, $N\to\infty$ とすると,

$$\begin{aligned}\zeta_{r+1}(s,z\mid\omega_0,\underline{\omega}) &= \frac{1}{\omega_0(s-1)}\zeta_r(s-1,z\mid\underline{\omega})+\frac{1}{2}\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega}) \\ &+\sum_{k=1}^{M-1}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(s)_k\omega_0^k\zeta_r(s+k,z\mid\underline{\omega}) \\ &-\frac{(s)_M}{M!}\omega_0^M\int_0^\infty B_M(t-[t])\zeta_r(s+M,z+t\omega_0\mid\underline{\omega})dt.\end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで induction の仮定より, $\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega})$ は全 s 平面に解析接続されていて, 更に $M>r+1-\Re(s)$ とすると

$$\int_0^\infty|\zeta_r(s+M,z+t\omega_0\mid\underline{\omega})|dt<\infty, \tag{2.10}$$

ゆえにこの表示により $\zeta_{r+1}(s,z\mid\omega_0,\underline{\omega})$ は全 s 平面に有理型に解析接続される. □

注意 **2.3.** 解析接続には片側条件が必要であるが, 変数 z についての片側条件は, 多重ゼータの満たす差分方程式

$$\zeta_{r+1}(s,z+\omega_0\mid\omega_0,\underline{\omega})=\zeta_{r+1}(s,z\mid\omega_0,\underline{\omega})-\zeta_r(s,z\mid\underline{\omega}) \tag{2.11}$$

(但し, これは ω_0 だけでなく ω_k についても同様に成り立つことに注意しておく) より inductive に外すことができる.

本稿の最後で述べる結果において必要になるので多重ガンマ函数をここで定義しておく.

定義 **2.4.** Barnes の $r+1$ 重ガンマ函数を次で定める.

$$\Gamma_{r+1}(z\mid\omega_0,\underline{\omega}):=\exp\left(\frac{\partial\zeta_{r+1}}{\partial s}(0,z\mid\omega_0,\underline{\omega})\right). \tag{2.12}$$

特に $r=0$ の時は,

$$\begin{aligned}\Gamma_1(z\mid\omega_0) &:=\exp\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial s}(0,z\mid\omega_0)\right) \\ &=\frac{\Gamma\left(\frac{z}{\omega_0}\right)}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

但し $\Gamma(z)$ は普通のガンマ函数.

注意 **2.5.** 上のように定義すると多重ガンマの変数 z には片側条件がついているが, これは多重ゼータの差分関係式 (2.11) より導かれるガンマの差分関係式

$$\Gamma_{r+1}(z+\omega_0\mid\omega_0,\underline{\omega})=\Gamma_r(z\mid\underline{\omega})^{-1}\Gamma_{r+1}(z\mid\omega_0,\underline{\omega}) \tag{2.14}$$

(但し, これは任意の ω_k についても同様に成り立つことに注意) から inductive に外すことができる. つまり $\Gamma_{r+1}(z\mid\omega_0,\underline{\omega})$ と書いたときは, パラメータについての片側条件の下で,z について有理型に解析接続されていることに注意.

3 bilateral ゼータ

定義 3.1. $z, \omega_0, \underline{\omega}$ が ω_0-片側条件 ($z, \omega_k(\forall k)$ が原点と ω_0 を結ぶ直線 L で分けられた二つの領域[*4]のうちのどちらか片方に全てあること) を満たすとして, $\Re(s) > r+1$ の時, bilateral 多重 ($r+1$ 重) ゼータ函数を以下で定める.

$$\xi_{r+1}(s, z \mid \omega_0; \underline{\omega}) := \sum_{n\in\mathbf{Z}, m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty} \frac{1}{(n\omega_0 + m_1\omega_1 + \cdots + m_r\omega_r + z)^s}. \tag{3.1}$$

$r=0$ の時は特に $\xi_1(s, z \mid \omega_0)$ と書くことにする.

以下 bilateral ゼータを考える時は特に断らない限り $z, \omega_k(\forall k\backslash\{0\})$ は ω_0-片側条件を満たしているとする.

注意 3.2. ω_0-片側条件を満たしているとき $\Re(s) > r+1$ で $\xi_{r+1}(s,\, z \mid \omega_0, \underline{\omega})$ を定義する級数は絶対収束する.

$\xi_{r+1}(s, z \mid \omega_0; \underline{\omega})$ は次の命題と Barnes ゼータの解析接続より全 s 平面に解析接続される.

命題 3.3.

$$\begin{aligned}\xi_{r+1}(s, z \mid \omega_0; \underline{\omega}) &= \zeta_{r+1}(s, z \mid \omega_0, \underline{\omega}) + \zeta_{r+1}(s, z-\omega_0 \mid -\omega_0, \underline{\omega}), &(3.2)\\ &= \zeta_{r+1}(s, z \mid \omega_0, \underline{\omega}) + \zeta_{r+1}(s, z \mid -\omega_0, \underline{\omega}) - \zeta_r(s, z \mid \underline{\omega}). &(3.3)\end{aligned}$$

この命題と Barnes ゼータの Euler-Maclaurin 和公式による表示を用いると bilateral ゼータの次のような表示が得られる.

定理 3.4. $M > r+1-\Re(s)$ の時

$$\begin{aligned}\xi_{r+1}(s, z \mid \omega_0; \underline{\omega}) =& -\frac{(s)_M}{M!}\omega_0^M \int_0^\infty B_M(t-[t])\\ &\cdot(\zeta_r(s+M, z+t\omega_0 \mid \underline{\omega}) + (-1)^M \zeta_r(s+M, z-t\omega_0 \mid \underline{\omega}))dt. \end{aligned}\tag{3.4}$$

この表示から bilateral ゼータは,Barnes ゼータとは異なり ($s=1,2,\cdots,r$ で極を持たない), 全 s 平面で正則であり, 非正整数点で一位の零を持つことがわかる (また z についての片側条件は Barnes ゼータの時と同様に外すことができる). これから特に次を得る.

命題 3.5.

$$-\pi \le \arg(z), \arg(\omega_0), \arg(-\omega_0), \arg(\omega_1), \cdots, \arg(\omega_r) < \pi,$$

として

$$-\pi \le \arg(\alpha z), \arg(\alpha\omega_0), \arg(-\alpha\omega_0), \arg(\alpha\omega_1), \cdots, \arg(\alpha\omega_r) < \pi,$$

となるような $\alpha \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ について

$$\frac{\partial \xi_{r+1}}{\partial s}(-M, \alpha z \mid \alpha\omega_0; \alpha\underline{\omega}) = \alpha^M \frac{\partial \xi_{r+1}}{\partial s}(-M, z \mid \omega_0; \underline{\omega}). \tag{3.5}$$

但し,$M \in \mathbf{Z}_{\ge 0}$ であり $-\omega_0$ のマイナスは ω_0 が上半平面にあるときは $e^{-\pi i}$ で, 下半平面にあるときは $e^{\pi i}$.

更に $\xi_{r+1}(s, z \mid 1; \underline{\omega})$ は周期 1 の周期函数ゆえ Fourier 展開できる.

命題 3.6. $\mathrm{Im}(z) > 0$ の時, $\forall s \in \mathbf{C}$ について

$$\xi_1(s, z \mid 1) = \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{2\pi i n z}. \tag{3.6}$$

[*4] L もどちらかに含まれるとする.

証明. 与式の両辺は $\mathrm{Im}(z)>0,\ \forall s\in\mathbf{C}$ について定義され解析的なので $0<\Re(z)<1,\ \Re(s)>2$ に制限した場合を示せば十分である. 以下の積分を二通りに計算して示す.

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty-i0}^{\infty-i0}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt. \tag{3.7}$$

まず普通に計算すると,

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty-i0}^{\infty-i0}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt=\frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\int_{-\infty}^{0}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt+\int_{0}^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt\right\}.$$

ここで $0<\Re(z)<1$ ゆえ, $\Re(n+1-z)>0(\forall n\in\mathbf{Z}_{\geq 0})$ が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt=&\int_{0}^{-\infty}\frac{t^{s-1}e^{(1-z)t}}{1-e^{t}}dt\\ =&\int_{0}^{-\infty}t^{s-1}e^{(1-z)t}\sum_{n=0}^{\infty}e^{nt}dt\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{-\infty}t^{s-1}e^{(n+1-z)t}dt\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{t}{(-(n+1-z))}\right)^{s-1}e^{-t}(-(n+1-z))dt\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-n-1)^{s}}\int_{0}^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt\\ =&\Gamma(s)\zeta_1(s,z-1\mid -1).\end{aligned}$$

同様に

$$\int_{0}^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt=\Gamma(s)\zeta_1(s,z\mid 1).$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty-i0}^{\infty-i0}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt=&\zeta_1(s,z-1\mid -1)+\zeta_1(s,z\mid 1)\\ =&\xi_1(s,z\mid 1).\end{aligned}$$

他方, 留数計算より[*5]

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty-i0}^{\infty-i0}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt=&\frac{-2\pi i}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{t=-2\pi in}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt\\ =&\frac{(-2\pi i)^{s}}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}e^{2\pi inz}.\end{aligned}$$

□

注意 3.7. ここで出てきた $-2\pi i$ は正確には $2\pi e^{-\frac{\pi}{2}i}$ であるが, 以下応用する際には s は整数しか値をとらないので $-2\pi i$ と表記しても問題ない.

この公式に関していくつかコメントしておく. この公式は z を上半平面に制限した時の $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数分解

$$\pi i+(-2\pi i)\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\pi inz}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)$$

[*5] 本当は path の評価をする必要があるが詳細は省略.

を $k(\in \mathbf{N})$ 回 z で微分して得られる

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi in)^k e^{2\pi inz} = (-1)^k k! \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(n+z)^k} \tag{3.8}$$

において $k!$ を $\Gamma(k-1)$ と書き直し,k を一般の複素変数 s に置き換えたものに他ならず, ある意味で納得できる (?) 公式である. しかしこれそのものを explicit に述べているモノは色々探してみたが筆者が見つけ出せたのは [AAR] の chapter2 の exercise37 だけであった[*6]. ちなみにそこでヒントとして仄めかされている証明法は Carlson の定理を用いるというもので, ここで述べた証明とは別のものである.

一方でこの公式 (3.6) は Hurwitz ゼータの有名な Hurwitz の公式 ([AIK] 参照)[*7]

$$\zeta_1(s,z\mid 1) = \frac{(-\pi i)(2\pi)^{s-1}}{\Gamma(s)\sin(\pi s)}\left(e^{\frac{\pi is}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}}{n^{1-s}} - e^{-\frac{\pi is}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi inz}}{n^{1-s}}\right) \tag{3.9}$$

と同値である (但しここで z は $0<z\le 1$ なる実数で,s も $\Re(s)<0$ に制限している). つまりこの Hurwitz の公式を用いて

$$\xi_1(s,z\mid 1) = \zeta_1(s,z\mid 1) + e^{-\pi is}\zeta_1(s,1-z\mid 1) \tag{3.10}$$

を計算することで (3.6) が得られ, 逆に (3.6) を用いて z と s を制限して

$$\zeta_1(s,z\mid 1) = \frac{1}{1-e^{-2\pi is}}(\xi_1(s,z\mid 1) - e^{-\pi is}\xi_1(s,1-z\mid 1)) \tag{3.11}$$

を計算することで Hurwitz の公式が得られる. しかし Hurwitz の公式と比べるとまるで知られていないこの Lipschitz の公式は, 以下にみていくように特殊函数論的には Hurwitz の公式よりも遥かに便利である.

定理 3.8. $\mathrm{Im}(z),\mathrm{Im}(\omega_1)\cdots,\mathrm{Im}(\omega_r)>0$ の時, $\forall s\in\mathbf{C}$ について

$$\xi_{r+1}(s,z\mid 1;\underline{\omega}) = \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{s-1}e^{2\pi inz}}{(1-e^{2\pi in\omega_1})\cdots(1-e^{2\pi in\omega_r})}. \tag{3.12}$$

証明. 変数やパラメータは皆上半平面にあるので, 片側条件を満たしている. よって, 実部が十分大きな s について $\xi_{r+1}(s,z\mid 1;\underline{\omega})$ の級数表示は絶対収束するので, 式 (3.6) より

$$\begin{aligned}
\xi_{r+1}(s,z\mid 1;\underline{\omega}) &= \sum_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}\xi_1(s,z+m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r\mid 1)\\
&= \sum_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}\frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}e^{2\pi in(z+m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r)}\\
&=\frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n,m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}n^{s-1}e^{2\pi in(z+m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r)}\\
&=\frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{s-1}e^{2\pi inz}}{(1-e^{2\pi in\omega_1})\cdots(1-e^{2\pi in\omega_r})}.
\end{aligned}$$

□

系 3.9. $\mathrm{Im}(z),\mathrm{Im}(\omega_1)\cdots,\mathrm{Im}(\omega_r)>0$ の時

$$\frac{\partial\xi_{r+1}}{\partial s}(0,z\mid 1;\underline{\omega}) = -\log\prod_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i(m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r+z)}). \tag{3.13}$$

---

*6 これの絶対値をつけた実解析版は有名だがこの形のものはほとんど見かけない. いずれにしろこの型の公式は Lipshitz の公式と呼ばれるようである.

*7 但し [AIK] では Hurwitz の公式とは呼ばれていない.

4 多重 Bernoulli 多項式と Barnes ゼータの特殊値

定義 4.1. r 重 n 次の Bernoulli 多項式 $B_{r,n}(z \mid \underline{\omega})$ を以下の母函数によって定める.

$$\frac{t^r e^{zt}}{(e^{\omega_1 t}-1)\cdots(e^{\omega_r t}-1)} := \sum_{k=0}^{\infty} B_{r,k}(z \mid \underline{\omega})\frac{t^k}{k!}. \tag{4.1}$$

ここで $z, \omega_1, \cdots, \omega_r$ は片側条件を満たしていなくても良いことに注意.

この定義より $B_{r,n}(z \mid \underline{\omega})$ は $\omega_1, \cdots, \omega_r$ のモノミアル対称多項式と Bernoulli 数とで z の n 次多項式として明示的に書き下すことができるが, 以下で書き下して使うのは $B_{2,2}(z \mid \omega_1, \omega_2)$ だけなので具体的な表示はこの例を挙げるに留める.

例 4.2.

$$B_{1,1}(z \mid \omega_1) = \frac{z}{\omega_1} - \frac{1}{2} \tag{4.2}$$

$$B_{2,2}(z \mid \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1\omega_2}z^2 - \frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1\omega_2}z + \frac{\omega_1^2+\omega_2^2+3\omega_1\omega_2}{6\omega_1\omega_2} \tag{4.3}$$

母函数表示より次のような多重 Bernoulli 多項式の性質が導かれる.

命題 4.3.

$$B_{r,n}(cz \mid c\underline{\omega}) = c^{n-r}B_{r,n}(z \mid \underline{\omega}) \ (c \in \mathbf{C} - \{0\}) \tag{4.4}$$

$$B_{r,n}(|\underline{\omega}| - z \mid \underline{\omega}) = (-1)^n B_{r,n}(z \mid \underline{\omega}) \tag{4.5}$$

$$B_{r,n}(z+\omega_j \mid \underline{\omega}) - B_{r,n}(z \mid \underline{\omega}) = nB_{r-1,n-1}(z \mid \underline{\omega}^-(j)) \tag{4.6}$$

$$B_{r,n}(z \mid \underline{\omega}[j]) = -B_{r,n}(z+\omega_j \mid \underline{\omega}) \tag{4.7}$$

$$B_{r,n}(z \mid \underline{\omega}) + B_{r,n}(z \mid \underline{\omega}[j]) = -nB_{r-1,n-1}(z \mid \underline{\omega}^-(j)) \tag{4.8}$$

$$\frac{d}{dz}B_{r,n}(z \mid \underline{\omega}) = nB_{r,n-1}(z \mid \underline{\omega}). \tag{4.9}$$

ここで

$$c\underline{\omega} := (c\omega_1, \cdots, c\omega_r) \tag{4.10}$$

$$|\underline{\omega}| := \omega_1 + \cdots + \omega_r \tag{4.11}$$

$$\underline{\omega}^-(j) := (\omega_1, \cdots, \widehat{\omega}_j, \cdots, \omega_r) \tag{4.12}$$

$$\underline{\omega}[j] := (\omega_1, \cdots, -\omega_j, \cdots, \omega_r). \tag{4.13}$$

以下で必要になるので $\zeta_r(s,\, z \mid \underline{\omega})$ の負の整数点での値を計算しておこう.

命題 4.4. $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ について

$$\zeta_r(1-m,\, z \mid \underline{\omega}) = (-1)^r \frac{(m-1)!}{(m+r-1)!} B_{r,r+m-1}(z \mid \underline{\omega}). \tag{4.14}$$

上で示した E-M 展開から求めることもできるが, 多重 Bernoulli 多項式との関連を見やすくする為に積分表示から計算しよう.

証明. まず解析接続より $z, \omega_1, \cdots, \omega_r$ が皆正の実数として計算できれば十分であることに注意. a を十分小さな

実数[*8]としておいて,

$$
\begin{aligned}
\zeta_r(s,\,z\mid\underline{\omega}) &= \sum_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}\frac{1}{(z+m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r)^s}\\
&=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-(z+m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r)t}dt\\
&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{(1-e^{-\omega_1 t})\cdots(1-e^{-\omega_r t})}dt\\
&=\frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\int_0^a+\int_a^\infty\right\}\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{(1-e^{-\omega_1 t})\cdots(1-e^{-\omega_r t})}dt.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\int_0^a\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{(1-e^{-\omega_1 t})\cdots(1-e^{-\omega_r t})}dt &= \int_0^a t^{s-r-1}\frac{(-t)^r e^{-zt}}{(e^{-\omega_1 t}-1)\cdots(e^{-\omega_r t}-1)}dt\\
&=\int_0^a t^{s-r-1}\sum_{k=0}^{\infty}B_{r,k}(z\mid\underline{\omega})\frac{(-t)^k}{k!}dt\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}B_{r,k}(z\mid\underline{\omega})\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^a t^{s+k-r-1}dt\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}B_{r,k}(z\mid\underline{\omega})\frac{(-1)^k}{k!}\frac{a^{s+k-r}}{s+k-r}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\zeta_r(s,\,z\mid\underline{\omega})=\frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}B_{r,k}(z\mid\underline{\omega})\frac{(-1)^k}{k!}\frac{a^{s+k-r}}{s+k-r}+\int_a^\infty\frac{t^{s-1}e^{-zt}}{(1-e^{-\omega_1 t})\cdots(1-e^{-\omega_r t})}dt\right\}.
$$

この表示により $\zeta_r(s,\,z\mid\underline{\omega})$ は有理型函数として全 s 平面に解析接続されるが, 後ろの積分は任意の s について正則なので $s\to 1-m$ で消えてしまうことに注意すると,

$$
\begin{aligned}
\zeta_r(1-m,\,z\mid\underline{\omega}) &= \lim_{s\to 1-m}\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{\infty}B_{r,k}(z\mid\underline{\omega})\frac{(-1)^k}{k!}\frac{a^{s+k-r}}{s+k-r}\\
&=\lim_{s\to 1-m}\frac{1}{\Gamma(s)}B_{r,r+m-1}(z\mid\underline{\omega})\frac{(-1)^{r+m-1}}{(r+m-1)!}\frac{a^{s+m-1}}{s+m-1}\\
&=B_{r,r+m-1}(z\mid\underline{\omega})\frac{(-1)^{r+m-1}}{(r+m-1)!}\lim_{s\to 1-m}\frac{1}{(s+m-1)\Gamma(s)}\\
&=B_{r,r+m-1}(z\mid\underline{\omega})\frac{(-1)^{r+m-1}}{(r+m-1)!}(-1)^{m-1}(m-1)!\\
&=(-1)^r\frac{(m-1)!}{(m+r-1)!}B_{r,r+m-1}(z\mid\underline{\omega}).
\end{aligned}
$$

□

5 応用

これまで述べてきたことの応用として, 古典的に有名な結果である Dedekind のエータ函数

$$
\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i}{12}\tau}\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i m\tau}) \tag{5.1}
$$

[*8] r 重 Bernoulli 多項式の母函数の収束半径より小さな数とする.

(但し $\mathrm{Im}\,\tau>0$. 以下特に断らない限り τ は上半平面にあるとする) の反転公式

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\eta(\tau) \tag{5.2}$$

(但し $-1/\tau$ は上半平面にあるとするので, 正確には $e^{\pi i}/\tau$ である) を示してみよう.

証明.

$$f(\tau):=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i m\tau}\right) \tag{5.3}$$

とすると, 系 3.9 より $-\log f(\tau)$ と $-\log f\left(e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\right)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
-\log f(\tau)&=\frac{\partial}{\partial s}\xi_2(s,\tau\mid 1;\tau)\Big|_{s=0}.\\
-\log f\left(e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\right)&=\frac{\partial}{\partial s}\xi_2\left(s,e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\mid 1;e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\right)\Big|_{s=0}\\
&=\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\right)^{-s}\xi_2(s,1\mid e^{-\pi i}\tau;1)\Big|_{s=0}.
\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
g(s,\tau):=&\xi_2(s,\tau\mid 1;\tau)-\left(e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\right)^{s}\xi_2\left(s,e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\mid 1;e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\right)\\
=&\xi_2(s,\tau\mid 1;\tau)-\xi_2(s,1\mid e^{-\pi i}\tau;1)
\end{aligned}$$

を考えると ξ_2 は $s=0$ で零であることに注意して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}g(s,\tau)\Big|_{s=0}=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{2\pi i n\tau}}{1-e^{2\pi i n\tau}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{-2\pi i n\frac{1}{\tau}}}{1-e^{-2\pi i n\frac{1}{\tau}}}\\
=&\log f\left(e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\right)-\log f(\tau).
\end{aligned}$$

他方, ξ_2 を ζ_2 に分解すると

$$\begin{aligned}
g(s,\tau)&=\{\zeta_2(s,1+\tau\mid 1,\tau)+\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau)\}\\
&\quad-\{\zeta_2(s,1+\tau\mid \tau,1)+\zeta_2(s,1\mid e^{-\pi i}\tau,1)\}\\
&=\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau)-\zeta_2(s,1\mid e^{-\pi i}\tau,1)\\
&=\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau)-e^{\pi i s}\zeta_2(s,e^{\pi i}\mid \tau,e^{\pi i}).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}g(s,\tau)\Big|_{s=0}&=-\pi i\zeta_2(0,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial s}\{\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau)-\zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\}\Big|_{s=0}\\
&=\frac{\pi i}{2}B_{2,2}(0\mid\tau,1)+\frac{\partial}{\partial s}\{(\tau^{-s}-e^{-\pi i s})\zeta(s)\}\Big|_{s=0}\\
&=\frac{\pi i}{4}+\frac{\pi i}{12}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)+(-\log\tau+\pi i)\zeta(0)\\
&=-\frac{\pi i}{4}+\frac{\pi i}{12}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)+\frac{1}{2}\log\tau.
\end{aligned}$$

但し $\zeta(s)$ は Riemann ゼータであり, $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$ であることを用いた.

$$\therefore \log f\left(e^{\pi i}\frac{1}{\tau}\right)=\log f(\tau)+\frac{1}{2}\log\frac{\tau}{i}+\frac{\pi i}{12}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right).$$

$\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i}{12}\tau}f(\tau)$ なので整理して結論を得る. □

この結果は非常に有名で証明も何種類か知られているが, 筆者が知っているのは 5 種類であり, それぞれあげると

1. 五角数定理 ($f(\tau)$ の Fourier 展開公式) と Poisson 和公式を用いる方法 (Dedekind 流).
2. Louville の定理を用いる方法 (Jacobi 流).
3. 条件収束級数
$$F_1(z\mid 1,\tau):=\sum_{n,m\in\mathbf{Z}}\frac{1}{n+m\tau+z} \tag{5.5}$$
を用いる方法 (Eisenstein 流).
4. $\frac{1}{z}\cot(\pi i(n+\frac{1}{2})z)\cot(\pi(n+\frac{1}{2})z/t)$($n$ は非負整数で t は正の実数) の留数計算を用いる方法 (Siegel 流).
5. $-\log f(\tau)$ の Mellin 変換が $\zeta(s)\zeta(s+1)$ になることを利用して $\zeta(s)$ の函数等式から導く方法 (Weil 流).

である (ちなみに番号ごとに流派の名前をつけてみたが, 後ろの三つはともかくとして*9, 前の二つに関しては好い加減につけたので誤解なさらぬよう). では, 上で述べたような bilateral ゼータを使った証明はどの流派に属するのか? 感じとしては Eisenstein と Siegel の折衷のように思える. つまり反転させた公式の変形操作は Eisenstein に, 反転させて出てくるおつりの計算 (二重ゼータの計算) をするところは Siegel に似ている*10. しかし二重ガンマ (の対数) に分解してそれが互いに相殺していくというある意味での主要部分は, いずれの流派にも属さない新しいやり方といえる.

実を言えば, 二重ガンマを使う方法は例えば [KO] などで述べられている. しかしそのやり方は二重ガンマを極めて詳細に調べた後で (多重ガンマ函数の反転公式もどきのようなものまでわざわざ示して), その応用として述べる（しかも応用として述べられているのは古典的なエータ函数とテータ函数だけである）ものであり多大な労力を払った割には収穫は多くない. 同様の方針で証明するのであれば, 多重ガンマの性質は一切不問にして (唯一定義といってもいい, 差分関係式のみで), それらを組み合わせたものについての性質を考えると議論も遥かに簡単で, かつ応用も広くなる*11. 例えば, エータ函数の反転公式は上で述べた $g(s,\tau)$ の s で微分して 0 を代入したものだが、これを s で微分して負の偶数 $-2N$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial s}g(s,\tau)\right|_{s=-2N} &= \frac{(2N)!}{(-2\pi i)^{2N}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2N+1}}\frac{e^{2\pi i n\tau}}{1-e^{2\pi i n\tau}}-\tau^{2N}\frac{(2N)!}{(-2\pi i)^{2N}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2N+1}}\frac{e^{-2\pi i n\frac{1}{\tau}}}{1-e^{-2\pi i n\frac{1}{\tau}}}\\
&= -\pi i\zeta_2(-2N,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\\
&\quad+\left.\frac{\partial}{\partial s}\{\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau)-\zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\}\right|_{s=-2N}\\
&= \frac{\pi i}{(2N+2)(2N+1)}B_{2,2+2N}(0\mid\tau,1)+\left.\frac{\partial}{\partial s}\{(\tau^{-s}-e^{-\pi i s})\zeta(s)\}\right|_{s=-2N}\\
&= \frac{\pi i}{(2N+2)(2N+1)}B_{2,2+2N}(0\mid\tau,1)+(\tau^{2N}-1)\frac{\partial\zeta}{\partial s}(-2N).
\end{aligned}$$

---

*9 各人がその開祖である.

*10 (3.6) は Riemann ゼータの函数等式の親玉である Hurwitz の公式と同値なので実は Weil 流にも近いと言える.

*11 これが Bilateral ゼータの大きな特徴, 更に言えば Barnes ゼータの組み合わせで定義されるにもかかわらずそれ自身が固有の名を冠するに値するゼータたりえると信ずる所以である.

ここで Riemann ゼータの函数等式

$$\zeta(s)=2\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s)$$

より

$$\frac{\partial\zeta}{\partial s}(-2N)=\frac{(-1)^N}{2}(2N)!(2\pi)^{-2N}\zeta(2N+1)$$

となるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\zeta(2N+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2N+1}}\frac{e^{2\pi in\tau}}{1-e^{2\pi in\tau}}&=\tau^{2N}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2N+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2N+1}}\frac{e^{-2\pi in\frac{1}{\tau}}}{1-e^{-2\pi in\frac{1}{\tau}}}\right\}\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{2N+1}}{(2N+2)!}B_{2,2+2N}(0\mid\tau,1).\end{aligned}\tag{5.6}$$

を得る. これは [Gui] による一般化された Lambert 級数の反転公式である[*12]. 正の偶数 $2N$ の場合については $g(s,\tau)$ を s で微分せずにそのまま代入すると

$$\begin{aligned}g(s,\tau)|_{s=2N}&=\frac{(-2\pi i)^{2N}}{(2N-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2N-1}e^{2\pi in\tau}}{1-e^{2\pi in\tau}}-\tau^{-2N}\frac{(-2\pi i)^{2N}}{(2N-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2N-1}e^{-2\pi in\frac{1}{\tau}}}{1-e^{-2\pi in\frac{1}{\tau}}}.\\&=\{\zeta_2(s,\tau\mid e^{\pi i},\tau)-\zeta_2(s,e^{\pi i}\mid\tau,e^{\pi i})\}|_{s=2N}\\&=\{(\tau^{-s}-e^{-\pi is})\zeta(s)\}|_{s=2N}\\&=(\tau^{-2N}-1)\zeta(2N)\\&=(\tau^{-2N}-1)\left(-\frac{1}{2}\frac{B_{2N}}{(2N)!}(2\pi i)^{2N}\right).\end{aligned}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2N-1}e^{-2\pi in\frac{1}{\tau}}}{1-e^{-2\pi in\frac{1}{\tau}}}-\frac{B_{2N}}{4N}=\tau^{2N}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2N-1}e^{2\pi in\tau}}{1-e^{2\pi in\tau}}-\frac{B_{2N}}{4N}\right).\tag{5.7}$$

これはよく知られた Eisenstein 級数の反転公式 (の Fourier 展開表示) になっている. 更に $g(s,\tau)$ を s で微分して -1 を代入して τ で微分して整理すると平面分割の母函数である McMahon 函数

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi im\tau})^{-m}\tag{5.8}$$

の反転公式も得られる[*13]. このように bilateral ゼータによるエータ函数の反転公式による証明は, 同様の対象物 (今の場合 $g(s,\tau)$) から様々な類似の公式が次々と得られる点が面白いと思う.

また近年得られた以下のような結果等も容易に示すことが出来る (記号の定義は後ろで述べる).

定理 5.1. (Friedman, Ruijsenaars) $\mathrm{Im}(\omega_1),\cdots,\mathrm{Im}(\omega_r)>0$ の時,

$$\begin{aligned}&\Gamma_{r+1}(z\mid 1,\underline{\omega})\Gamma_{r+1}(1-z\mid 1,-\underline{\omega})\\&=e^{-\pi i\zeta_{r+1}(0,z|1,\underline{\omega})}\prod_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i(m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r+z)})^{-1}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

定理 5.2. (成川) $r\geq 2,\mathrm{Im}(\omega_j/\omega_l)\neq 0$ の時

$$S_r(z\mid\underline{\omega})=e^{\pi i\zeta_r(0,z|\underline{\omega})}\prod_{k=1}^{r}(\widetilde{x_k;\,\underline{q_k}})_{\infty}^{(r-1)}\tag{5.10}$$

$$=e^{-\pi i\zeta_r(0,z|\underline{\omega})}\prod_{k=1}^{r}(\widetilde{x_k{}^{-1};\,\underline{q_k}{}^{-1}})_{\infty}^{(r-1)},\tag{5.11}$$

[*12] Ramanujan の公式とも呼ばれるようだ.

[*13] 形が複雑なのでここには書かないが恐らく知られていない結果だと思われる.

但し $S_r(z \mid \underline{\omega})$ は多重三角函数

$$S_r(z \mid \underline{\omega}) := \Gamma_r(z \mid \underline{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\underline{\omega}| - z \mid \underline{\omega})^{(-1)^r}. \tag{5.12}$$

ここで

$$|\underline{\omega}| := \omega_1 + \cdots + \omega_r.$$

注意 5.3. $\zeta_r(s, z \mid \underline{\omega})$ の s が非正数点での値は,E-M 公式の表示からもわかるように, 多項式 (多重 Bernoulli 多項式) でかけるので片側条件なしでも $\zeta_r(0, z \mid \underline{\omega})$ 等は定義されていることに注意する.

系 5.4. (多重テータ函数の反転公式) $r \geq 1, \mathrm{Im}(\omega_j/\omega_l) \neq 0$ の時

$$\prod_{k=1}^{r+1} \Theta_r(z_k \mid \omega_{1k}, \cdots, \widehat{\omega}_{kk}, \cdots, \omega_{r+1k}) = e^{2\pi i(-1)^r \zeta_{r+1}(0,z|\underline{\omega})}, \tag{5.13}$$

ここで $\Theta_r(z \mid \underline{\omega})$ は多重テータ函数

$$\Theta_r(z \mid \underline{\omega}) :=(\widetilde{q_1 \cdots q_r x^{-1}; \underline{q}})^{(r)}_\infty \{(\widetilde{x; \underline{q}})^{(r)}_\infty\}^{(-1)^{r-1}}, \tag{5.14}$$

$$=\{(\widetilde{x^{-1}; \underline{q^{-1}}})^{(r)}_\infty\}^{(-1)^r} \{(\widetilde{x; \underline{q}})^{(r)}_\infty\}^{(-1)^{r-1}}. \tag{5.15}$$

注意 5.5. 多重テータ函数 $\Theta_r(z \mid \underline{\omega})$ は [Nis] により導入されたもので[*14] 次のような差分関係式を満たす.

$$\Theta_r(z+1 \mid \omega_1, \cdots, \omega_r) = \Theta_r(z \mid \omega_1, \cdots, \omega_r)$$
$$\Theta_r(z+\omega_k \mid \omega_1, \cdots, \omega_r) = \Theta_{r-1}(z \mid \omega_1, \cdots, \widehat{\omega}_k, \cdots, \omega_r)\Theta_r(z \mid \omega_1, \cdots, \omega_r)$$

$r = 1$ の時は本質的に普通のテータ函数である.

定義 5.6. $\mathrm{Im}(\omega_k) > 0 (\forall k)$ の時,q-shifted factorial$(x; \underline{q})^{(r)}_\infty$ を次のように定める.

$$(x; \underline{q})^{(r)}_\infty := \prod_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i(m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r+z)}) \tag{5.16}$$

$$= \prod_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty} (1 - q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r} x), \tag{5.17}$$

$$(\underline{q} := (q_1, \cdots, q_r), q_k := e^{2\pi i \omega_k} (\forall k), x := e^{2\pi i z}).$$

更に

$$\mathrm{Im}(\omega_1), \cdots, \mathrm{Im}(\omega_l) < 0, \mathrm{Im}(\omega_{l+1}), \cdots, \mathrm{Im}(\omega_r) > 0$$

の時, 一般化された q-shifted factorial$(\widetilde{x; \underline{q}})^{(r)}_\infty$ を次のように定める.

$$(\widetilde{x; \underline{q}})^{(r)}_\infty := (q_1^{-1} \cdots q_l^{-1} x; q_1^{-1}, \cdots, q_l^{-1}, q_{l+1}, \cdots, q_r)^{(r)\,(-1)^l}_\infty \tag{5.18}$$

また $(\widetilde{x_k; \underline{q_k}})^{(r-1)}_\infty$ は,$\mathrm{Im}(\omega_j/\omega_l) \neq 0$ を仮定して

$$x_k := e^{2\pi i z_k}, \underline{q_k} := (q_{1k}, \cdots, \widehat{q}_{kk}, \cdots, q_{r+1k}), q_{jk} := e^{2\pi i \omega_{jk}}.$$

を一般化された q-shifted factorial に代入したものである. 但し $\omega_{ij} := \omega_i/\omega_j$ であり, これは $\mathrm{Im}(\omega_j/\omega_l) \neq 0$ を仮定するとパラメータの番号の付け替えによって

$$\mathrm{Im}(\omega_{1k}), \cdots, \mathrm{Im}(\omega_{lk}) < 0, \mathrm{Im}(\omega_{(l+1)k}), \cdots, \mathrm{Im}(\omega_{rk}) > 0$$

のようにできることに注意する.

bilateral ゼータを用いたこれらの証明は今筆者が準備中の論文を参照して欲しい (またあとで).

[*14] [Nis] や [Nar1] は楕円ガンマ函数との兼ね合いからか多重楕円ガンマ函数と呼んでいる. 多重テータ函数は [Nar2] に出てくる名称である. 多重ガンマとの意味の整合性から筆者はこの名称の方が良いと思う.

参考文献

[AAR] G.E.Andrews,R.Askey,R.Roy: *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications,71. Cambridge University Press,(1999).

[AIK] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信: ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店,(2001).

[FR] E.Friedman,S.Ruijsenaars: *Shintani-Barnes zera and gamma functions*, Advances in Math. 187 (2) (2004), 362-395.

[Gui] A.P.Guinand: *Functional equations and self-reciprocal functions connected with Lambert series*, Quart. J Math. Oxford Ser. 15 (1944), 11-23.

[KO] K.Katayama,M.Ohtsuki: *On the Multiple Gamma-Functions*, Tokyo J. Math 21 (1998), no.1 159-182.

[Nar1] A.Narukawa: *The modular properties and the integral representations of the multiple elliptic gamma functions*, Advances in Math. 189 (2) (2004), 247-267.

[Nar2] 成川淳: 多重化展覧会, http://homepage2.nifty.com/narukawa/multiple.pdf.

[Nis] M.Nishizawa: *An elliptic analogue of the multiple gamma function*, J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001), 7411-7421.