円単数の Euler 系と高次 Fitting イデアル

大下　達也*

京都大学大学院理学研究科　数学・数理解析専攻　数学系　博士後期課程 1 回生

第 7 回城崎新人セミナーに参加させて頂き，ありがとうございました．この場をお借りして，運営委員の皆様に御礼を申し上げます．本稿では第 7 回城崎新人セミナーでの筆者の発表を元に，イデアル類群に付随する岩澤加群のプラスパートの高次 Fitting イデアルに関する筆者の研究結果の紹介を行いたいと思います．

目次

* ohshita@math.kyoto-u.ac.jp

1　概要

栗原将人氏は，論文 [Ku] において，イデアル類群に付随する岩澤加群のマイナスパートの高次 *Fitting* イデアルを決定することで，総実代数体上の岩澤主予想（マイナスパート）[*1][*2]の精密化を行うことに成功した．本稿で紹介する筆者の研究は，$\mathbb{Q}(\mu_p)$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に沿ったイデアル類群に付随する岩澤加群のプラスパートの高次 Fitting イデアルに関するものであり，栗原氏の結果のプラスパート版の構築を試みたものである（[Oh1] 参照）．プラスパートに関しては，高次 Fitting イデアルを決定することはできていないが，高次 Fitting イデアルの大きさを評価できるような岩澤代数のイデアルを，円単数の *Euler* 系を用いて構成することで，岩澤主予想（プラスパート）の精密化と見なせる結果を得ることができた．本稿では，この結果の紹介を行いたい．

本稿では，証明にはあまり立ち入らず，高次 *Fitting* イデアルによって，どのように岩澤主予想が精密化されるかということを中心に解説する．また，本稿では，末尾に附録を設け，イデアル類群と p 進数の解説を行っているので，これらに馴染みのない方は活用して頂きたい．

記号

p を奇素数とし，以下固定する．$\overline{\mathbb{Q}}$，$\overline{\mathbb{Q}}_p$ をそれぞれ $\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包とする．埋め込み

$$\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$$

を固定し，$\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ 及び，$\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ と見なす．本稿で扱う代数体は，全て $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体であるとする．各正の整数 n に対して，μ_n を $\overline{\mathbb{Q}}$ に属する 1 の n 乗根全体のなす群とする．

2　岩澤主予想

本節では，キーワードの 1 つである岩澤主予想（プラスパート）の主張を手短に紹介する．

2.1　岩澤代数とその加群

脚注 1 でも言及しているように，岩澤主予想と呼ばれる定理には，いくつかバリエーションがあるが，ここでは，イデアル類群の p-Sylow 部分群の，体の拡大の列 $\mathcal{F}_m := \mathbb{Q}(\mu_p^{m+1})$ に沿った挙動を記述するものに限って，簡単に紹介を行いたい．A_m を $\mathcal{F}_m$ のイデアル類群 $\mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_m}$ の p-Sylow 部分群とし，ノルム写像[*3]による射影系 $\{A_m\}_{m>0}$ の射影極限を X とおく．このとき，X は自然に岩澤代数（群環の完備化）

[*1] 岩澤主予想は，岩澤理論と呼ばれる整数論の一分野の主要な定理（あるいは予想）である．扱う対象によって，岩澤主予想にはいくつかのバリエーションがある．本稿で扱うものは，それらのうち最も古くから知られている形のものであり，この形の「主予想」は既に証明された定理である．（本稿で扱う岩澤主予想は，いろいろな証明方法が知られている．例えば，[MW]，[Wi]，[Ru1] 等参照．）本稿 §2.2 でも言及するように，岩澤主予想は「マイナスパート」と「プラスパート」という 2 つの側面を持ち，本稿では専らプラスパートを扱う．（「マイナスパート・プラスパート」というのは，やや非公式な用語なので注意が必要である．）

[*2] 本稿では，岩澤理論自体について詳しく紹介する余裕はないが，標語的に言うならば，Galois 群の作用を持つ代数的な数論的対象（ここではイデアル類群）と「ゼータ関数」に類する解析的な対象（ここでは Riemann ゼータ関数，Dirichlet L 関数や，その代数的対応物である円単数）を「p 進的な世界」で捉え，深く結びつける理論である．岩澤主予想は，岩澤理論の中でも特に重要なもので，岩澤理論の理念を結晶化したような定理である．

[*3] L/K を代数体の有限次拡大とする．L の各元 a に対して，K 上のベクトル空間としての自己準同型写像

$$m_a\colon L \longrightarrow L;\ x \longmapsto ax$$

が定まる．これによって定まる写像

$$\mathrm{N}_{L/K}\colon L \longrightarrow K;\ a \longmapsto \det(m_a)$$

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q})]] := \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathbb{Q})]$ 上の加群とみなせる．岩澤主予想は，以下で紹介するように，Λ 加群 X の構造に関する重要な不変量（特性イデアル）を記述する定理である．

岩澤主予想の主張を述べるためには，岩澤代数 Λ の構造について触れておく必要がある．まず，円分体論により，

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q}) = \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1} \times (1+p\mathbb{Z}_p)$$

である．このことから，$\Delta := \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_0/\mathbb{Q})$，$\Gamma_m := \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_0)$（$m \geq 0$）とおくと，

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q}) \simeq \Delta \times \Gamma_0$$

（$\Delta \simeq \mu_{p-1}$，$\Gamma_0 \simeq 1+p\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p$）と直積分解し，

$$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]][\Delta] = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_0)][\Delta]$$

と見なされる．群 Δ は位数が p と互いに素な Abel 群であるから，環の直積分解 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]][\Delta] = \prod_\chi \Lambda_\chi$ が得られる．ここで，各 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に対して，$\mathcal{O}_\chi$ は $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]][\Delta]$ の冪等元

$$\epsilon_\chi := \frac{1}{p-1}\sum_{\sigma\in\Delta}\chi(\sigma)^{-1}\sigma$$

を用いて，

$$\mathcal{O}_\chi := \epsilon_\chi \mathbb{Z}_p[\Delta],$$

で定義される（ϵ_χ を乗法の単位元とする）$\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 代数である．$\mathcal{O}_\chi$ は $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]]$ と同型な環であり，指標 χ による群 Δ の作用を持つ．すなわち，任意の $\sigma \in \Delta$ と $a \in \mathcal{O}_\chi$ に対して

$$\sigma a = \chi(\sigma)a$$

が成り立つ．この Λ の直和分解により，Λ 加群 X に対して，Λ 加群としての直積分解

$$M = \prod_{\chi\in\widehat{\Delta}} M_\chi$$

が得られる．ここで，$M_\chi := \epsilon_\chi M \simeq M \otimes_\Lambda \Lambda_\chi$ である．

環 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]]$ 及び，その上の加群の有限生成ねじれ加群の構造について簡単に説明したい．Γ_0 の位相的生成元 γ をひとつ固定すると，$\gamma \longleftrightarrow 1+T$ という対応により，同型

$$\mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]] = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_m/F_0)] \longrightarrow \varprojlim \mathbb{Z}_p[T]/\big((1+T)^{p^n}-1\big) = \mathbb{Z}_p[[T]]$$

が得られる．（この同型は Γ_0 の位相的生成元 γ に依存するものなので，自然（canonical）なものではない．）

M と N を Λ_χ（$\simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$）加群とする．$\mathbb{Z}_p[[T]]$ 加群の準同型 $f\colon M \longrightarrow N$ で，$\mathrm{Ker}\, f$ と $\mathrm{Coker} f$ の位数がともに有限であるようなものが存在するとき，M は N に擬同型（*pseudo-isomorphic*）であるといい，$M \sim N$ とかく．特に，$M \sim 0$ であるとき，M は擬零（*pseudo-null*）であるという．

擬同型による二項関係 $\sim$ は有限生成ねじれ Λ_χ 加群の間の同値関係をなす．有限生成ねじれ Λ_χ 加群には，次の構造定理が知られている．

を L から K へのノルム写像という．定義より $\mathrm{N}_{L/K}|_{L^\times}: L^\times \longrightarrow K^\times$ は乗法群の間の群準同型である．この写像から誘導されるイデアル類群の間の群準同型

$$\mathrm{N}_{L/K}\colon \mathrm{Cl}_L \longrightarrow \mathrm{Cl}_K;\ [I]_L \longmapsto [\mathrm{N}_{L/K}(I)\text{ で生成される } K \text{ の分数イデアル}]_K$$

をイデアル類群の間のノルム写像という．（ここで，代数体 K の分数イデアル I に対して，I のイデアル類を $[I]_K$ と書いた．）

定理 2.1. M を有限生成ねじれ Λ_χ 加群とする．このとき

$$M \sim \bigoplus_{i=1}^{r} \Lambda_\chi / f_i \Lambda_\chi$$

ここで，$f_1, \cdots, f_r$ は 0 でない Λ_χ の元である．

注意 2.2. 上の定理の $f_1, \cdots, f_r \in \Lambda_\chi$ を次のようにとることができる．

(i) 各 $f_1, \cdots, f_r$ は Λ_χ の素元の冪であるようにとることができる．このようにとる場合，$f_1, \cdots, f_r$ は Λ_χ の可逆元倍，及び並べ換えを除けば，M に対して一意的に定まる．

(ii) Λ_χ の元 a, b に対して，b が a の倍元であるとき（すなわち，ある $c \in \Lambda_\chi$ によって $b = ac$ となるとき)，$a|b$ と書こう．上の定理の Λ_χ の元の列 $f_1, \cdots, f_r$ を $f_1|f_2|\cdots|f_r$ を満たすようにとることができる．このようにとる場合，$f_1, \cdots, f_r$ は Λ_χ の可逆元倍を除けば，M に対して一意的に定まる．

この構造定理により有限生成ねじれ Λ_χ 加群の重要な不変量である特性イデアルが定義される．

定義 2.3. M を有限生成ねじれ Λ_χ 加群とする．$f_1, \cdots, f_r \in \Lambda_\chi$ を上の定理 2.1 のものとするとき，Λ_χ の単項イデアル

$$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(M) := (\prod_{i=1}^{r} f_i)\Lambda_\chi$$

を M の特性イデアルという．$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(M)$ は，$f_1, \cdots, f_r$ のとり方に依らず，M の擬同型類のみによって定まる．

X は有限生成ねじれ Λ 加群であることが知られており，特に，特性イデアル $\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X)$ を考えることができる．次分節 2.2 で紹介する岩澤主予想は，$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X_\chi)$ を記述する定理である．

2.2 岩澤主予想

岩澤主予想は X_χ（$\chi \in \widehat{\Delta}$）の特性イデアルを，ゼータ関数に由来するイデアルを使って記述する定理であり，指標 χ が奇指標であるか偶指標であるか*4によって異なる形をとる．岩澤主予想のうち，奇指標に関する主張はマイナスパート，偶指標に関する主張はプラスパートと呼ばれている*5．有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の岩澤主予想のマイナスパートは，$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X_\chi)$ を，Riemann ゼータ関数（と Dirichlet L 関数）の p 進類似である p 進ゼータ関数と呼ばれるものを用いて記述する定理である．これに対してプラスパートは，$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X_\chi)$ を，ゼータ関数の特殊値と深く関係する円単数*6と呼ばれる単数を用いて記述する定理である．

本稿では，主結果と直接関係するプラスパートの主張のみを紹介する．(岩澤主予想のマイナスパートの主張に関しては，例えば，[MW]，[Wi]，[Wa] 第 13.6 節と第 15.3 節，あるいは [KKS] 第 10.3 節などを参照して頂きたい．また，非常に粗雑なものであるが，筆者の前年度の城崎新人セミナーの拙稿 [Oh2] でも，マイナスパートを含む，岩澤主予想の紹介を行っている．)

まず，単数群に関する記号の準備をする．$\mathcal{F}_m$ の整数環を $\mathcal{O}_m$，その単数群を $E_m := \mathcal{O}_m^\times$ とおき，E_m の p 進完備化を $E_m^1 := E_m \otimes \mathbb{Z}_p$ と書く．$\{E_m^1\}_{m \geq 0}$ はノルムに関して射影系をなし，その射影極限を $E_\infty^1 := \varprojlim E_m^1$ とおく．E_m は自然に Λ 加群の構造を持つ．

---

*4 群 $\Delta = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ は，複素共役 c を元に持つ．指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ が，$\chi(c) = -1$ を満たすとき，χ は奇指標であるといい，$\chi(c) = 1$ であるとき，χ は偶指標であるという．

*5 脚注 1 でも触れたとおり，「プラス（マイナス）パート」という用語はやや非公式なものであるが，便利であり，本稿を読む上では誤解が生じないので，この用語を採用する．

*6 円単数と（p 進）ゼータ関数の関係については，例えば [CS] 第 2.2 節や [Wa] 第 13.8 節などを参照して頂きたい．

次に，単数群 E_m の部分群である円単数群 C_m を定義する．1 の冪根と $\{1-\zeta \mid \zeta \in \mu_{p^{m+1}},\ \zeta \neq 1\}$ で生成される $\mathcal{F}_m^\times$ の部分群と E_m の共通部分を C_m とおき，その元を $\mathcal{F}_m$ の円単数と呼ぶ．C_m は E_m の指数有限な部分群である．C_m の p 進完備化を $C_m^1 := C_m \otimes \mathbb{Z}_p$ とおく．$\{E_m^1\}_{m\geq 0}$ および，$\{C_m\}_{m\geq 0}$ はノルムに関して射影系をなし，その射影極限を C_∞^1 とおく．C_∞^1 は，自然に E_∞^1 の部分 Λ 加群とみなせる．

任意の偶指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に対して，$E^1_{\infty,\chi}/C^1_{\infty,\chi}$ は有限生成ねじれ Λ_χ 加群であり，特に特性イデアル C_∞^1 を考えることができる．

以上で，岩澤主予想の主張を述べる準備が整った．

定理 2.4 (岩澤主予想プラスパート)**.** χ を Δ の偶指標とする．このとき，

$$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X_\chi) = \mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E^1_{\infty,\chi}/C^1_{\infty,\chi})$$

が成り立つ．

この定理の左辺はイデアル類群に由来する Λ_χ のイデアルであり，右辺は，Riemann ゼータ関数の代数的対応物（化身）である円単数に由来するイデアルであった．両者の間には先験的には大きな隔たりがあるにも関わらず，p 進の世界で，このような形で深く結び付くのである．

3　岩澤主予想の精密化と主定理

岩澤主予想は岩澤加群 X_χ の特性イデアルを記述する定理である．特性イデアルは，岩澤加群の重要な情報を与える不変量であるが，特性イデアルだけでは，岩澤加群の擬同型類までは特定することができない．次の例は，それを顕著に表している．

例 3.1. $f \in \Lambda_\chi$ を 0 でも可逆元でもない元（例えば p）とし，2 つの Λ 加群

$$M_1 := \Lambda_\chi/f^2\Lambda_\chi,$$
$$M_2 := (\Lambda_\chi/f\Lambda_\chi)^{\oplus 2}$$

を考える．このとき，M_1 と M_2 は同型ではなく，擬同型でもないが，

$$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(M_1) = \mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(M_2) = f^2\Lambda_\chi$$

である．この例は 3.4 で再び扱う．

3.1　高次 Fitting イデアル

ここでは，高次 Fitting イデアルと呼ばれる可換環上の加群の不変量について説明する．後で例 3.4 及び例 3.5 見るように，高次 Fitting イデアルの記述を行うことで，岩澤加群のより深い構造（例えば擬同型類）に関する情報を得ることができる．まず，定義を述べよう．

定義 3.2 (高次 Fitting イデアル)**.** R を可換環，M を有限表示 R 加群とし，

$$R^m \xrightarrow{f} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

を R 加群の完全列とする．R 加群の準同型 f に対応する R 係数の n 行 m 列の行列を A とおく．このとき任意の 0 以上の整数 i に対して，可換環 R のイデアル $\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ を次で定義する．

- $0 \leq i < n$ かつ $m \geq n-i$ であるとき，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ を，A の $(n-i)$ 次小行列式全体で生成される R のイデアルとする．

- $0 \leq i < n$ かつ $m < n - i$ であるとき，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) := 0$ とする．
- $i \geq n$ であるとき，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) := R$ とする．

$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ は完全列 (3.1) の取り方によらない．R のイデアル $\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ を M の i 次 Fitting イデアルという．

上のように，M を完全列 (3.1) を持つ有限表示 R 加群とすると，次のような環 R のイデアルの列が得られる:

$$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M) \subseteq \mathrm{Fitt}_{R,1}(M) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Fitt}_{R,n}(M) = \mathrm{Fitt}_{R,n+1}(M) = \cdots = R.$$

特性イデアルとは違い，高次 Fitting イデアルは，加群の生成元の個数に関する情報も持っている．R 加群 M の (最小の) 生成元の個数を $\nu_R(M)$ とおくと，$\mathrm{Fitt}_{R,n}(M) \neq R$ であれば, $\nu_R(M) \geq n+1$ であることが，高次 Fitting イデアルの定義により直ちに従う．さらに，R が局所環や単項イデアル整域であれば，$\nu_R(M) = i+1$ であることが，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) \neq R$ かつ $\mathrm{Fitt}_{R,i+1}(M) = R$ であることと同値であることが分かる．

例 3.3 (単項イデアル整域の場合)**.** R が単項イデアル整域であるとし，M を有限生成 R 加群とする．このとき，単因子論により，R 加群の完全列

$$R^n \xrightarrow{f} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

で，R 加群の準同型 f が次のような R-係数の対角行列 A で与えられるものを取ることができる:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & a_n \end{pmatrix}$$

であって，$1 \leq i \leq n-1$ なる各 i に対して，a_i は a_{i+1} を割り切る．

このとき，M の高次 Fitting イデアルは，

$$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) = \begin{cases} \left(\prod_{k=1}^{n-i} a_k\right)R & (\text{if } i < n) \\ R & (\text{if } i \geq n). \end{cases}$$

となる．$\{\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)\}_{i \geq 0}$ によって行列 A が復元できるので，単項イデアル整域上の有限生成加群の同型類は高次 Fitting イデアルによって完全に決定される．

例 3.4 ($\mathbb{Z}_p[[T]]$ の場合 I)**.** $R = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とする．$f \in R$ を 0 でも可逆元でもない R の元とする．$M_1 = R/f^2R$ とし，$M_2 = (R/f)^2$ とする．このとき

$$\mathrm{char}_R(M_1) = \mathrm{Fitt}_{R,0}(M_1) = f^2R,$$
$$\mathrm{char}_R(M_2) = \mathrm{Fitt}_{R,0}(M_2) = f^2R$$

となって，特性イデアルだけでは M_1 と M_2 を区別することができない．ところが，1 次の Fitting イデアルを比較すると

$$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M_1) = R,$$
$$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M_2) = fR.$$

となり，両者を明確に区別することができる．このように，特性イデアルだけでなく，高次 Fitting イデアルまで考察することで，加群の構造に関するより深い情報を捉えることが出来る．

例 3.5 ($\mathbb{Z}_p[[T]]$ の場合 II)**.** 再び $R = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とし，より一般的に論じよう．M を有限生成ねじれ R 加群とする．M が次のような R 加群と擬同型であるとする:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} R/f_iR$$

であって，$0 \leq i \leq r-1$ なる各 i に対して f_i は f_{i+1} を割り切る．

このとき，M の高次 Fitting イデアルは，

$$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) = \begin{cases} (\prod_{k=1}^{n-i} f_k) I_i & (\text{if } i < n) \\ I_i & (\text{if } i \geq n) \end{cases}$$

と表わされる．ここで，各 i に対して，I_i は R のある指数有限なイデアルである．特に，$\{\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)\}_{i\geq 0}$ によって M の擬同型類が決定される．(一般には，同型類までは決定できないことに注意する．)

3.2 主定理

栗原氏は，論文 [Ku] において，(総実代数体上のセッティングで) 奇指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に関する X_χ の高次 Fitting イデアルをを次の意味で完全に決定した：

> 「*Stickelberger* 元」と呼ばれるゼータ関数に由来する Galois 群の群環の元を用いて，「高次 *Stickelberger* イデアル」と呼ばれる Λ_χ のイデアル $\Theta_{i,\chi}$ ($i \geq 0$) を明示的 (explicite) に構成し，各 $i \geq 0$ に対して，
>
> $$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X_\chi) = \Theta_{i,\chi}$$
>
> であることを証明した．

これは，岩澤主予想の強力な精密化である．

概要 (§1) で述べたとおり，本稿の主定理は，この結果の「プラスパート」版に関するものである．プラスパートでは，マイナスパートでは出てこないような技術的な困難が現れる*7．これらの困難のために，X_χ の高次 Fitting イデアルを完全に決定するようなイデアルを構成することは未だ達成できていないが，以下で述べるように，高次 Fitting イデアルの (非自明な) 評価を与える様なあるイデアルを，円単数を用いて明示的に構成することができた．それが本稿の主結果である．

$\chi \in \widehat{\Delta}$ を 1 でない任意の偶指標とする．X_χ の最大擬零部分 Λ_χ 加群を $X_{\mathrm{fin},\chi}$ と置き，$X'_\chi := X_\chi / X_{\mathrm{fin},\chi}$ と置く．本来の主たる興味は，X の構造にあるのだが，技術的な問題により，X と同じ擬同型類に属する，より扱い易い加群 X'_χ の研究を行う．(「擬同型類を記述することが目標である」という立場から研究を行うのであれば，このように X を X' に取り換えても問題はない．)

本稿 §4.2 では，各非負整数 i に対して，高次 Stickelberger イデアルのプラスパート版の対応物になるような Λ_χ のイデアル $\mathfrak{C}_i$ (「i 次円分イデアル」と呼ぶことにする) を，Stickelberger 元の代わりに円単数を用いて構成し，これらのイデアル $\mathfrak{C}_{i,\chi}$ が，$\{\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi)\}_{i\geq 0}$ の「上界」を与えていることを証明する．次の定理が本稿の主定理である．

定理 3.6. χ を 1 でない Δ の指標とする．Λ_χ 加群 $X_{\mathrm{fin},\chi}$ の零化元 (annihilator) 全体を $\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})$ とおく．すなわち，

$$\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi}) := \{a\Lambda_\chi \mid 任意の\ x \in X_\chi に対して, ax = 0\ が成立\ \}.$$

このとき，次が成立する．

*7 例えば，(一般的に)「プラスパート」に関する研究を行う場合は，単数群がしばしば困難の要因になる．また，加群 X_χ は，χ が奇指標のときは 0 以外の擬零部分加群を持たないことが知られているが，χ が偶指標であるときは，そうであるとは限らない．

(i) $\mathfrak{C}_{0,\chi} \subseteq \mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,0}(X'_\chi)$.
(ii) 任意の $i \geq 0$ に対して，$\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})\,\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi) \subseteq \mathfrak{C}_{i,\chi}$.

主定理に関して，いくつか注意を述べておく．

注意 3.7. $\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})$ は指数有限な Λ_χ のイデアルであるので，この「誤差」は X_χ の「擬同型類を記述することが目標である」という立場でみれば無視できるものである．マイナスパートでは，$X_{\mathrm{fin},\chi} = 0$ であり，このような「誤差」も現れない．

注意 3.8. $\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi)$ はイデアル類群から定まるイデアルであり，他方 $\mathfrak{C}_{i,\chi}$ は円単数を用いて定義されるイデアルである（定義は少し複雑なので，次節で述べる）．定理の $i = 0$ に関する主張は，岩澤主予想と同値であり，この定理は岩澤主予想の精密化になっている．

注意 3.9. $\chi = 1$ のときは，$X_1 = X'_1 = \{0\}$ であることが知られている．

注意 3.10. 「χ が偶指標のとき，必ず $X_\chi = 0$ となるのではないか？」(Vandever 予想）という予想や，もう少し主張の弱い，「χ が偶指標のとき，必ず $X_\chi = X_{\mathrm{fin},\chi}$ となるのではないか？」(Greenberg 予想）という予想があり，これらの予想が正しければ，本稿の主定理は自明である．しかし，この予想に関しては，今のところ有効なアプローチはほとんどないため，本稿の主定理は無価値なものではない．

4　高次円分イデアルの定義

4.1　円単数

前節で言及したように，高次 Stickelberger イデアルのプラスパート版の対応物高次円分イデアルは，円単数を用いて構成される．ここでは，高次円分イデアルの定義をするための円単数に関する準備を行う．本分節のゴールは，円単数の *Kolyvagin derivative* と呼ばれる元 $\kappa^n_{m,N}(\xi) \in F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ を定義することである．

整数 e を，$\mathbb{Z}_l^\times$ の位相的生成元になるようにとって固定する．正の整数 N に対して，

$$\mathcal{S}_N := \big\{\ell \mid \ell\text{は } e \text{ を割り切らない素数で，} \ell \equiv 1 \pmod{p^N} \text{ を満たすもの}\big\},$$
$$\mathcal{N}_N := \Big\{\prod_{i=1}^{r} \ell_i \mid r > 0,\ \ell_i \in \mathcal{S}_N\ (i = 1, \ldots, r),\ \text{and } \ell_i \neq \ell_j \text{ if } i \neq j\Big\} \cup \{1\},$$

と置く．

定義 4.1. $n \in \mathcal{N}_N$ と $\zeta \in \mu_{p^{m+1}n} \backslash \{1\}$ に対して，

$$\mathrm{cyc}(\zeta) := \frac{\zeta^{-e/2} - \zeta^{e/2}}{\zeta^{-1/2} - \zeta^{1/2}} \in F_m(n)$$

とおく．ここで，$\zeta^{1/2}$ は，2 乗して ζ になる唯一の $\mu_{p^{m+1}n}$ の元（群 $\mu_{p^{m+1}n}$ の位数が奇数であることに注意）であり，$F_m(n)$ は $\mathcal{F}_m = \mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}n})$ の最大実部分体である． 特に，$F_m := F_m(1)$ と置く．

円単数 $\mathrm{cyc}(\zeta)$ ノルムに対して次の性質をもつ[*8]．

[*8] 非常に雑な説明をすると，このようなノルムに関する「よい」性質を備えた元の系を Euler 系という．Euler 系は岩澤理論の議論において極めて重要な役割を担うものである．本稿でも大変重要な役割を果たすのだが，残念ながら本稿では，Euler 系の理論に関して立ち入る余裕はない．

補題 4.2. $n \in \mathcal{N}_N$ とする．

(i) $\ell \in \mathcal{S}_N$ を n の約数でない素数とする．$\zeta_\ell \in \mu_\ell$ を 1 の原始 ℓ 乗根とし，$\xi \in \mu_{p^{m+1}n} \backslash \{1\}$ とする．このとき，

$$N_{F_m(n\ell)/F_m(n)}\bigl(\mathrm{cyc}(\zeta_\ell \xi)\bigr) = \frac{\mathrm{cyc}(\xi^\ell)}{\mathrm{cyc}(\xi)}$$

が成り立つ．

(ii) $\xi \in \mu_n$ とすると，

$$N_{F_{m+1}(n)/F_m(n)}\bigl(\mathrm{cyc}(\rho_{m+1}\xi)\bigr) = \mathrm{cyc}(\rho_m \xi^p)$$

が成り立つ．

任意の非負整数 m と $n = \prod_{i=1}^r \ell_i \in \mathcal{N}_N$ に対して，$H_{F_m,n} := \mathrm{Gal}\bigl(F_m(n)/F_m\bigr)$ とおく．このとき，次の様な自然な同型がある：

$$\begin{aligned} H_{F_m,n} &= \mathrm{Gal}\bigl(F_m(n)/F_m\bigr) \simeq \mathrm{Gal}\bigl(\mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}n})/\mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})\bigr) \\ &\simeq \mathrm{Gal}\bigl(\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q}\bigr) \\ &\simeq \mathrm{Gal}\bigl(\mathbb{Q}(\mu_{\ell_1})/\mathbb{Q}\bigr) \times \cdots \times \mathrm{Gal}\bigl(\mathbb{Q}(\mu_{\ell_r})/\mathbb{Q}\bigr) \\ &\simeq H_{\ell_1} \times \cdots \times H_{\ell_r}. \end{aligned}$$

そこで，任意の非負整数 m に対して，$H_{F_m,n}$ を自然な同型で $H_{F_0,n}$ 同一視し，$H_n := H_{F_m,n} = H_{F_0,n}$ とおく．

定義 4.3. $n \in \mathcal{N}_N$ とし，n は $n = \prod_{i=1}^r \ell_i$ と素因数分解されるとする．このとき，各 ℓ_i に対して，

$$D_{\ell_i} := \sum_{k=1}^{\ell_i - 2} k\sigma_{\ell_i}^k \in \mathbb{Z}[H_{\ell_i}] \subseteq \mathbb{Z}[H_n]$$

とおき，

$$D_n := \prod_{i=1}^r D_{\ell_i} \in \mathbb{Z}[H_n].$$

とおく．

補題 4.4. $n \in \mathcal{N}_N$ とする．このとき，自然な準同型

$$F_m^\times/(F_m^\times)^{p^N} \longrightarrow \bigl[F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}\bigr]^{H_n}$$

は同型である．ここで，$\bigl[F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}\bigr]^{H_n}$ は，$F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ の H_n-不変な元のなす集合である．

補題 4.5. $n \in \mathcal{N}_N$ とし，$\ell \in \mathcal{S}_N$ を n の素因子とする．$\xi \in \mu_n$ を 1 の原始 $p^{m+1}n$ 乗根とするとき，$\mathrm{cyc}(\xi)^{D_n}$ の $F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ における像は H_n-不変である．

定義 4.6. $n \in \mathcal{N}_N$ とし，$\xi \in \mu_{p^{m+1}n}$ を 1 の原始 $p^{m+1}n$ 乗根とする．このとき，補題 4.4 及び補題 4.5 により，$F_m^\times/(F_m^\times)^{p^N}$ の元で，$F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ における像が，$\mathrm{cyc}(\xi)^{D_n}$ の像と一致するものがただひとつ存在する．この $F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ の元を $\kappa_{m,N}^n(\xi)$ とおく．

4.2 円分イデアルの定義

まず，m と N を固定して議論する．$R_{m,N} := (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})[\mathrm{Gal}(F_m/\mathbb{Q})]$ とおく．

定義 4.7. $n \in \mathcal{N}_N$ とする．$\{\kappa_{m,N}(\xi) \mid \xi \in \mu_n\}$ で生成される $F_m^\times/(F_m^\times)^{p^N}$ の部分 $R_{m,N}$ 加群を $W_{m,N}^n$ とおく．

プラスパートの場合は，「Stickelberger 元」に対応するものは，円単数であって，群環 $R_{F_m,N}$ の中の元ではない．今回は，円単数を準同型で群環 $R_{F_m,N,\chi}$ に送った像を *Stickelberger* 元に見立てて，高次 Stickelberger イデアルに対応するイデアルを構成する．

定義 4.8. $\mathcal{N}_N$ の元 n の素因子の個数を $\epsilon(n) := r$ とおく．すなわち，n が $n = \prod_{i=1}^r \ell_i$ ($\ell_i \in \mathcal{S}_N$ と素因数分解されるとき，$\epsilon(n) := r$ とおく．次の集合 A で生成される $R_{m,N}$ のイデアルを $\mathfrak{C}_{i,F_m,N}$ とおく：

$$A := \bigcup_{f,n} f(W_{F_m,N}^n),$$

ここで，n は，$\epsilon(n) \le i$ を満たす $\mathcal{N}_N$ の元全体を走り，f は，$R_{F_m,N}$-準同型 $f\colon W_{m,N}^n \longrightarrow R_{m,N}$ 全体を走る．

整数 m_1, m_2, N_1, N_2 が $N_1 \ge m_1+1$, $N_2 \ge m_2+1$, $m_2 \ge m_1$，$N_2 \ge N_1$ を満たしているとする．このとき，自然な準同型 $R_{m_2,N_2} \longrightarrow R_{m_1,N_1}$ により，準同型 $\mathfrak{C}_{i,F_{m_2},N_2} \longrightarrow \mathfrak{C}_{i,F_{m_1},N_1}$ が定まる．これらの準同型により，$\{\mathfrak{C}_{i,F_m,N}\}_{(m,N)}$ は射影系をなす．

定義 4.9 (i 次円分イデアル)**.** 射影系 $\{\mathfrak{C}_{i,F_m,N}\}_{(m,N)}$ の射影極限 $\mathfrak{C}_i$ は，自然に岩澤代数 $\Lambda = \varprojlim R_{m,N}$ のイデアルとみなせる．本稿では $\mathfrak{C}_i$ を i 次円分イデアルと呼ぶ．

以上で，主定理の主張に現れる「円分イデアル」$\mathfrak{C}_i$ が定義された．

5　主定理の証明の方針

本節では，主定理の証明のアイデアについて，少しだけ触れておくことにする．まず，主定理の主張を思い出しておこう．

定理 5.1 (定理 3.6)**.** χ を 1 でない Δ の指標とする．このとき，次が成立する．

(i) $\mathfrak{C}_{0,\chi} \subseteq \mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,0}(X'_\chi)$.
(ii) 任意の $i \ge 0$ に対して，$\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})\,\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi) \subseteq \mathfrak{C}_{i,\chi}$.

主定理は，$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,0}(X'_\chi)$（$i=0$）に関する主張の部分と，$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi)$（$i>0$）に関する主張の部分に分けられて，それぞれ異なる方法で証明される．どちらの部分の証明でも，岩澤主予想を使う．

主定理の証明の方針.
■$i=0$ の場合の証明のアイデア　2 つのイデアル，$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E^1_{\infty,\chi}/C^1_{\infty,\chi})$ 及び $\mathfrak{C}_{0,\chi}$ の比較を行うことで，

$$\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})\,\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E^1_{\infty,\chi}/C^1_{\infty,\chi}) \subseteq \mathfrak{C}_\chi, \tag{5.1}$$

及び

$$\mathfrak{C}_\chi \subseteq \mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})\,\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E^1_{\infty,\chi}/C^1_{\infty,\chi}) \tag{5.2}$$

を証明する（これらは非自明である）．これらの不等式と岩澤主予想のプラスパート

$$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X_\chi) = \mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E^1_{\infty,\chi}/C^1_{\infty,\chi})$$

により，主定理の $i=0$ の部分が従う．（$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,0}(X'_\chi) = \mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X_\chi)$ であることに注意.）

包含関係（5.1）の証明の概略　まず，記号を用意しよう．$\Lambda = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_m/\mathbb{Q}]$ 加群 M に対して，

$$\begin{aligned} M^{\Gamma_m} &:= \{a \in M \mid \gamma^{p^{m+1}} a = a\}, \\ M_{\Gamma_m} &:= M/(\gamma^{p^{m+1}} - 1)M \end{aligned}$$

とおく[*9]．次の結果が知られている:

補題 5.2. 自然な写像（第 m 成分の射影から定まる準同型）

$$(E^1_\infty)_{\Gamma_m} \longrightarrow E^1_m$$

を考える．

(i) この写像の核（kernel）への $\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ の作用は自明である．
(ii) この写像の余核（cokernel）は $\mathrm{ann}_\Lambda(X_{\mathrm{fin}})$ で零化（annihilate）される[*10]．

また，次の事実は重要である．

E^1_∞ とは C^1_∞ は，ともに階数 1 の自由 Λ_χ 加群であることが知られている．

同型写像

$$\varphi\colon E_\infty \xrightarrow{\simeq} \Lambda$$

をひとつ固定する．この同型により，任意の指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に対して，

$$\varphi(C^1_\infty)_\chi = \mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E^1_{\infty,\chi}/C^1_{\infty,\chi}) \subseteq \Lambda_\chi$$

となることに注意する．指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ 及び，非負整数 m，N に対して，自然な同型により $\Lambda_\chi/(p^N, \gamma^{p^{m+1}} - 1)$ と，$R_{m,N,\chi} := (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})[\mathrm{Gal}(F_m/\mathbb{Q})]_\chi$ を同一視すると，φ から同型写像

$$\bar{\varphi}_{m,N,\chi}\colon [(E^1_\infty)_{\Gamma_m}/(E^1_\infty)^{p^N}_{\Gamma_m}]_\chi \xrightarrow{\simeq} R_{F_m,N,\chi}$$

が定まる．

補題 5.2 により，次が得られる．

補題 5.3. 自然な写像 $[(E^1_\infty)_{\Gamma_m}/(E^1_\infty)^{p^N}_{\Gamma_m}]_\chi \longrightarrow [(E_m)_{\Gamma_m}/(E_m)^{p^N}]_\chi \subset [F^\times_m/(F_m)^{p^N}]_\chi$ の像を $\mathcal{E}_{m,N,\chi}$ と置く．このとき，任意の $\delta \in \mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})$ に対して，$R_{F_m,N}$ 加群の準同型 $\psi_\delta\colon \mathcal{E}_{m,N,\chi} \longrightarrow R_{F_m,N}$ で，図式

$$\begin{tikzcd}
{[(C^1_\infty)_{\Gamma_m}/(C^1_\infty)^{p^N}_{\Gamma_m}]_\chi} \arrow[r] \arrow[d] & {[(E^1_\infty)_{\Gamma_m}/(E^1_\infty)^{p^N}_{\Gamma_m}]_\chi} \arrow[r, "\delta\bar{\varphi}_{m,N,\chi}"] \arrow[d] & R_{F_m,N,\chi} \\
W^1_{F_m,N,\chi} \arrow[r, hook] & \mathcal{E}_{m,N,\chi} \arrow[ur, dashed, "\psi_\delta"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.3}$$

を可換にするようなものが存在する．

図式 5.3 より，直ちに，$R_{m,N,\chi}$ における $\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})\,\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E^1_{\infty,\chi}/C^1_{\infty,\chi})$ の像が $\mathfrak{C}_{0,m,N,\chi}$ に含まれることが示される．(m, N) に関して極限をとることで，包含関係（5.1）が証明される．

[*9] §2.1 で，$\Gamma_m := \mathrm{Gal}(F_m/F_0) = \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})/\mathbb{Q}(\mu_p)\right)$（$m \geq 0$）と置いたことを思い出そう．$\Gamma_m$ は $\gamma^{p^{m+1}}$（γ は Γ_0 の位相的生成元）により位相的に生成される $\mathbb{Z}_p$ と同型な位相群であった．

[*10] これらは，例えば [CS] Theorem 4.7.6 から直ちに得られる．

不等式（5.2）の証明の概略　包含関係（5.2）に比べて，こちらの包含関係の方が非自明なように見える．しかし，この包含関係は $R_{m,N,\chi}$ が入射的 (*injective*) $R_{m,N,\chi}$ 加群（！）であることに着目すればすぐに証明できる．

$R_{F_m,N,\chi}$ 加群の準同型

$$f\colon W^1_{F_m,N,\chi} \longrightarrow R_{F_m,N,\chi}$$

を任意にとると，$R_{F_m,N,\chi}$ が入射的であり，$W^1_{F_m,N,\chi} \subseteq [(E_m)_{\Gamma_m}/(E_m)^{p^N}]_\chi$ であることから，f は，$R_{F_m,N,\chi}$ 加群の準同型

$$\tilde{f}\colon [(E_m)_{\Gamma_m}/(E_m)^{p^N}]_\chi \longrightarrow R_{F_m,N,\chi}$$

に拡張できる．これにより，可換図式

$$\begin{tikzcd}
{[(C^1_\infty)_{\Gamma_m}/(C^1_\infty)^{p^N}_{\Gamma_m}]_\chi} \arrow[r] \arrow[ddr] & {[(E^1_\infty)_{\Gamma_m}/(E^1_\infty)^{p^N}_{\Gamma_m}]_\chi} \arrow[r, "\bar{\varphi}_{F_m,N,\chi}", "\simeq"'] \arrow[d] & R_{F,N,\chi} \arrow[d, dotted, "\times a"] \\
& {[(E_m)_{\Gamma_m}/(E_m)^{p^N}]_\chi} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & R_{F,N,\chi} \\
& W^1_{m,N,\chi} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

を得る．ここで，a はある Λ_χ の元であって，$\times a$ は「a 倍する」という写像である．この図式から，$\mathfrak{C}_{0,m,N,\chi}$ が，$R_{m,N,\chi}$ における $\varphi(C^1_\infty)_\chi = \mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E^1_{\infty,\chi}/C^1_{\infty,\chi})$ の像に含まれることが従う．(m,N) に関して極限をとることで，包含関係（5.2）が従う．

■$i>0$ の場合の場合の証明の方針　この部分は栗原氏の Euler 系の議論（[Ku] §9 参照）により示す[*11]．最も重要といえる部分なのだが，長い準備が必要になるので，残念ながら本稿ではこの議論について立ち入らないことにする．大体，次の様な方法で証明する．

X'_χ が非自明な擬零部分群を持たないことから，

$$0 \longrightarrow \Lambda^h_\chi \xrightarrow{\ f\ } \Lambda^h_\chi \longrightarrow X'_\chi \longrightarrow 0,$$

という Λ_χ 加群の完全列を取ることができる．準同型 f に対応する Λ 係数の $h\times h$ 行列を A とおく．ここで，γ は $\Gamma_0 = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_0)$ の位相的生成元であった．各整数 m，N（$m+1<N$），各 $\delta \in \mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})$，及び A の $(h-i)\times(h-i)$ 次小行列式 a に対して，円単数の Euler 系を用いて，次を満たす整数 $n=\prod_{\nu=1}^{i}\ell_i \in \mathcal{N}_N$（素因子の個数が i 個），元 $x \in W^n_{m,N}$，及び $R_{m,N,\chi}$ 加群の準同型 $\phi\colon W^n_{m,N} \longrightarrow R_{m,N,\chi}$ を構成する：

$$\phi(x) \equiv \delta a \mod (p^N, \gamma^{p^{m+1}}-1).$$

これにより，$R_{m,N,\chi}$ における $\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})\,\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi)$ の像が $\mathfrak{C}_{i,m,N,\chi}$ に含まれることが示され，(m,N) に関して極限をとることで，定理が証明される．□

付録 A　代数体とイデアル類群

本節では，本稿のキーワードのひとつである，イデアル類群について簡単に解説したい．イデアル類群や，その他の基本的な代数的整数論の概念について，より詳しく知りたい方は，例えば，[Ne] の第 1 章を参考にして頂きたい．

[*11] 岩澤主予想を使う議論であり，普通の（岩澤主予想の証明で用いるような）「Euler system argument」ではない．栗原氏が [Ku] において，「Gauss 和の Euler（Kolyvagin）系」を用いて行った議論を（わずかに修正して）「円単数の Euler 系」を用いて行う．

A.1 代数体と整数環

本付録で紹介するイデアル類群は，代数的整数論における重要な研究対象である．代数的整数論とは，「有理数体 $\mathbb{Q}$ と（有理）整数環 $\mathbb{Z}$」の代わりにより一般的な対象である「代数体と代数体の整数環」に関する研究を行う数学の分野である．まず，「代数体」および，「代数体の整数環」とは何かを説明したい．代数体とは，有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体のことである．K を代数体とするとき，K の整数環 $\mathcal{O}_K$ とは，次の集合のことである：

$$\{a \in K \mid \text{最高次の係数が 1 であるような } \mathbb{Z} \text{ 係数のある多項式 } f(x) \text{ に対して}, f(a) = 0\}.$$

（すなわち，K の整数環 $\mathcal{O}_K$ とは，K における $\mathbb{Z}$ の整閉包のことである．） 可換環論の一般論により，$\mathcal{O}_K$ は環であることがわかる．$\mathcal{O}_K$ の商体は K である．

例 付録 **A.1.** 代数体の整数環の例を挙げる．

- $K = \mathbb{Q}$ のとき $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ のとき $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ のとき $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right]$.
- $K = \mathbb{Q}(\mu_n)$ のとき，$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\mu_n]$.
  ここで，n は正の整数であり，μ_n は $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ に属する 1 の n 乗根全体の集合である．

A.2 素イデアル分解

$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Z}$ の整数論の中で次の定理は，最も重要なもののひとつである．

定理 付録 **A.2** (素因数分解の可能性と一意性). n を 2 以上の整数とする．このとき，n は（有限個の）素数の積として表される．すなわち，いくつかの素数 $p_1, \cdots, p_r$（重複可）によって，整数 n は

$$n = p_1 \cdots p_r$$

と表される．（この積表示のことを n の素因数分解という．）素因数分解は，素数の列 $\{p_i\}_{i=1}^r$ の並べ換えを除けば一意的である．

一般の代数体の整数環では「素因数（既約元）分解」の一意性が成り立つとは限らない．

例 付録 **A.3.** $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ であるとき，$6 \in \mathcal{O}_K$ は，

$$6 = 2 \times 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$$

と「2 通り」の方法で既約元の積に分解される．

例付録 A.3 から分かる様に，一般の代数体では，素因数（既約元）分解の一意性が成立しない場合もある．ところが，考察対象を「数」ではなく，「イデアル」にまで拡張することで，定理付録 A.2 は，「素イデアル分解の一意性」という形で，任意の代数体で成立する定理（定理付録 A.7）に拡張することができる．

定理付録 A.7 の主張を述べるために，イデアルについて簡単に説明しておく．まずイデアルの定義を復習しておこう．可換環 R の空集合でない部分集合 I が次の性質 (i), (ii) を満たすとき，I は R のイデアルであるという：

(i) $a, b \in I$ ならば $a + b \in I$；

(ii) $a \in I$ および $r \in R$ ならば $ra \in I$.

イデアルは「○○の倍数全体の集合」という概念を一般化したものである．

例 付録 **A.4.** I を $\mathbb{Z}$ のイデアルとするとき，I はある $n \in \mathbb{Z}$ によって

$$I = n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

と表される．（これは Euclid の互除法から従う事実である．）

イデアルのうち，「素数」に対応するものは**素イデアル**であった．素イデアルの定義を復習する前に，次に挙げる素数の性質を思い出しておこう．2 以上の整数 p が素数であることは，p が次の条件 (P_0) を満たすことと同値である：

(P_0) 整数 x, y の積 xy が p の倍数であるとき，x か y の少なくとも一方は必ず p の倍数である．

これを踏まえて，素イデアルの定義を述べよう．

定義 付録 **A.5.** R を可換環とし，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p} \neq R$ であるような R のイデアルとする．$\mathfrak{p}$ が次の性質 (P) を持つとき，$\mathfrak{p}$ は R の素イデアルであるという：

(P) R の元 x, y が，$xy \in \mathfrak{p}$ を満たすとき，$x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$ が成り立つ．

例 付録 **A.6.** $n \in \mathbb{Z}$ とする．このとき，$\mathbb{Z}$ のイデアル $n\mathbb{Z}$ が素イデアルであるための必要十分条件は，n が 0 または素数であることである．

I および J を R のイデアルとする．このとき，イデアル I とイデアル J の積 IJ とは，I の元と J の元の積で生成される R のイデアルのことである．すなわち，

$$IJ = \{\sum_{\nu=1}^{r} i_\nu j_\nu \mid r \text{ は正の整数で，各}\nu\text{に対して}, i_\nu \in I, j_\nu \in J\}.$$

以上で素イデアル分解に関する定理の主張を述べることができる．

定理 付録 **A.7** (素イデアル分解の可能性と一意性)**.** K を代数体とする．I を K の整数環 $\mathcal{O}_K$ のイデアルとし，I は $\{0\}$ でも $\mathcal{O}_K$ でもないとする．このとき I は（有限個の）素イデアルの積で表される．すなわち，いくつかの $\mathcal{O}_K$ の素イデアル $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$（重複可）によって，イデアル I は，

$$I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$$

と表される．（この積表示のことを I の**素イデアル分解**という．）素イデアル分解は，素イデアルの列 $\{\mathfrak{p}_i\}_{i=1}^{r}$ の並べ換えを除けば一意的である．

例 付録 **A.8.** $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ とする．K の元 $a_1, \cdots, a_r$ に対して，$a_1, \cdots, a_r$ で生成されるイデアルを $(a_1, \cdots, a_r)$ と書く．このとき，

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} &:= (2, 1-\sqrt{-5})\\ \mathfrak{q}_1 &:= (3, 1-\sqrt{-5})\\ \mathfrak{q}_2 &:= (3, 1+\sqrt{-5})\end{aligned}$$

とおくと，これら 3 つは全て素イデアルである．$\mathcal{O}_K$ のイデアル (2)，(3)，$(1-\sqrt{-5})$，$(1+\sqrt{-5})$，(6) は次

のように素因数分解される：

$$\begin{aligned}(2) &= \mathfrak{p}^2,\\(3) &= \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2,\\(1-\sqrt{-5}) &= \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1,\\(1+\sqrt{-5}) &= \mathfrak{p}\mathfrak{q}_2,\\(6) &= \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2.\end{aligned}$$

この分解は積の順番を除けば一意的である．

A.3 イデアル類群

K を代数体とする． 整数環 $\mathcal{O}_K$ が，単項イデアル整域（PID）であることと，素因数（既約元）分解の一意性が成立する環（UFD）であることは同値であることがわかる．K の整数環 $\mathcal{O}_K$ が，「PID かどうか？」，「PID でないならば，PID から外れているのか？」という問題は，代数的整数論において，非常に重要である．本分節で定義するイデアル類群は，まさに，代数体が「どのくらい PID から外れているか」を表している群である．

イデアル類群を定義するためには，分数イデアルという概念が必要である．

定義 付録 A.9 (分数イデアル)**.** K を代数体とする．K の有限生成部分 $\mathcal{O}_K$ 加群を K の分数イデアルという．

$\{0\}$ でない分数イデアル全体の集合を $\mathcal{I}_K$ とおくと，$\mathcal{I}_K$ は，（分数）イデアルの積で群をなす．

- $\mathcal{I}_K$ の単位元は，$\mathcal{O}_K$ である．
- I を $\mathcal{O}_K$ のイデアルとするとき，群 $\mathcal{I}_K$ における I の逆元は，$I^{-1} := \{a \in K \mid aI \subseteq \mathcal{O}_K\}$ である．

素イデアル分解の一意性により，$\mathcal{I}_K$ は，$\{0\}$ を除く K のすべての素イデアルによって生成される自由 Abel 群である．

$\mathcal{P}_K$ を単項分数イデアル全体からなる $\mathcal{I}_K$ の部分集合とする：

$$\mathcal{P}_K := \{a\mathcal{O}_K \mid a \in K^\times\}.$$

$\mathcal{P}_K$ は $\mathcal{I}$ の部分群である．以上の準備でイデアル類群の定義を述べることができる．

定義 付録 A.10. K を代数体とする．次で定義される群 Cl_K を K のイデアル類群という：

$$\mathrm{Cl}_K := \mathcal{I}_K/\mathcal{P}_K.$$

本分節の冒頭で述べたように，イデアル類群 Cl_K は，K が PID からどのくらい外れているかを表す群である．イデアル類群の定義より，K が PID であることと，$\mathrm{Cl}_K = \{0\}$（単位元のみからなる群）であることは同値であることが分かる．一般に，イデアル類群 Cl_K が大きな群であるほど体 K が PID から大きく外れているとみなすことができる．

注意 付録 A.11 (イデアル類群への Galois 群の作用)**.** L/K を代数体の有限次 Galois 拡大とする．このとき，L のイデアル類群には，自然に Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ が作用する．これについて簡単に説明する．まず，$\mathcal{O}_K$ の定義より，任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ に対して

$$\mathcal{O}_L^\sigma := \{a^\sigma \mid a \in \mathcal{O}_L\} = \mathcal{O}_L$$

となることが分かる．従って，I を L の分数イデアルとすると，I の $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ による像 I^σ もまた，L の分数イデアルであり，これにより $\mathcal{I}_L$ に $\mathrm{Gal}(L/K)$ の作用が入る．単項分数イデアル全体のなす $\mathcal{I}_L$ の部分群 $\mathcal{P}_L$ は，$\mathrm{Gal}(L/K)$ の作用で閉じているので，イデアル類群 $\mathrm{Cl}_L = \mathcal{I}_L/\mathcal{P}_L$ に $\mathrm{Gal}(L/K)$ の作用が誘導される．

注意 付録 **A.12.** イデアル類群は有限群であることが知られている[*12]．より深いイデアル類群の構造，例えばイデアル類群の位数（類数という）や，Abel 群としての構造，さらに，Galois 群の作用も含めた構造などを研究することは，代数的整数論の中でも重要なテーマである．

付録 B　p 進数

B.1　p 進数の定義

ここでは，整数論において極めて重要な，素数 p ごとに定義される，p 進数体と呼ばれる完備な位相体に関する説明を行いたい．完備な位相体である実数体 $\mathbb{R}$ が，絶対値から定まる位相で有理数体 $\mathbb{Q}$ を完備化して得られた体であったことを思い出そう．本節で説明する p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ は，有理数体を，絶対値ではなく，p 進絶対値と呼ばれるものから定まる位相で完備化して得られる体である．

まず，p 進絶対値を定義しなければならない．p を素数として，本節では固定する．r が 0 でない有理数であるとき，定理付録 A.2 より，

$$r = \pm p^{v_p(r)} \times u \quad (\text{ここで}, v_p(r) \text{ は整数}, u \text{ は分子も分母も } p \text{ で割り切れないような有理数})$$

という形に一意的に書ける．有理数 r に対して，p 進絶対値 $|r|_p$ を次で定める:

- $r \neq 0$ のときは，$|r|_p := p^{-v_p(r)}$;
- $r = 0$ のときは，$|0|_p := 0$.

このとき，次の (i)，(ii)，(iii) が成立することが，容易に確かめられる．

(i) 任意の有理数 r に対して，$|r|_p \geq 0$ である．もし $|r| = 0$ ならば，$r = 0$ である．

(ii) a, b を任意の有理数とするとき，
$$|ab|_p = |a|_p\,|b|_p$$
が成り立つ．

(iii) a, b を任意の有理数とするとき，
$$|a+b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$$
が成り立つ．ここで，
$$\max\{|a|_p, |b|_p\} = \begin{cases} a & (a \geq b \text{ のとき})\,; \\ b & (a \leq b \text{ のとき}). \end{cases}$$

上の（iii）の不等式より，特に次の三角不等式 (iii)' が従う:

(iii)' a, b を任意の有理数とするとき，
$$|a+b|_p \leq |a|_p + |b|_p$$
が成り立つ．

p 進絶対値の性質 (i)，(iii)' より，

$$d_p\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0};\quad (x, y) \longmapsto d_p(x, y) := |x - y|_p$$

は $\mathbb{Q}$ の距離を定める．距離空間 $(\mathbb{Q}, d_p)$ の完備化を $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ とおくと，p 進絶対値の性質 (ii) 及び (iii)（もしくは (iii)'）より，$\mathbb{Q}$ の四則演算は $\mathbb{Q}_p$ の四則演算に連続に拡張され，$\mathbb{Q}_p$ は完備な位相体になる．$\mathbb{Q}_p$ を p 進数体という．

[*12] これは 19 世紀に証明された重要な結果である．

$\mathbb{Q}_p$ における $\mathbb{Z}$ の閉包を $\mathbb{Z}_p$ と書き，これを p 進整数環という．定義より，$\mathbb{Z}_p$ は

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p \mid |a|_p \leq 1\}$$

という形をした $\mathbb{Q}_p$ の開かつ閉な部分環であり，$\mathbb{Z}_p$ の商体は，$\mathbb{Q}_p$ である．

$\mathbb{Z}_p$ に $\mathbb{Q}_p$ から誘導される位相を入れる．$\mathbb{Z}_p$ は自然な射影（環準同型）$\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ （$m \geq n$）による射影系 $\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}_{n\geq 0}$ の射影極限で定義される位相[*13]環 $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ と自然に（位相環として）同型になる[*14]．従って $\mathbb{Z}_p$ はコンパクトである．

最後に，環 $\mathbb{Z}_p$ の構造について触れておこう．

命題 付録 B.1. 環 $\mathbb{Z}_p$ は p を素元とする完備離散付値環である．すなわち，次が成り立つ．

- $\mathbb{Z}_p$ は整域であり，$p\mathbb{Z}_p$ を極大イデアルとする局所環である．
- $\mathbb{Z}_p$ の任意の $\{0\}$ でないイデアルは，

$$p^n\mathbb{Z}_p = \{p^n a \mid a \in \mathbb{Z}_p\} = \{a \in \mathbb{Z}_p \mid |a|_p \leq p^{-n}\} \quad (n \text{ は非負整数})$$

  という形で表される．
- p 進絶対値 $|\cdot|_p$ で定まる位相に関して，$\mathbb{Z}_p$ は完備である．

特に，任意の $\mathbb{Z}_p$ の元 a は，

$$a = p^{v_p(a)}u \quad (\text{ここで}, v_p(a) \in \mathbb{Z}_{n\geq 0},\ u \in \mathbb{Z}_p^\times)$$

という形に一意的に書ける．

また，$\mathbb{Z}_p$ の剰余体 $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ は自然に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型である．（本稿では，しばしば両者を同一視する．）

B.2 乗法群 $\mathbb{Z}_p^\times$ 及び $\mathbb{Q}_p^\times$ の構造

本節では，$\mathbb{Z}_p$ 及び $\mathbb{Q}_p$ の乗法群の構造について述べる．前節の命題付録 B.1 より，

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{u \in \mathbb{Z}_p \mid u \notin p\mathbb{Z}_p\} = \{u \in \mathbb{Z}_p \mid |u|_p = 1\}.$$

従って自然な射影 $\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_p^\times$ 上に制限することで，乗法群の準同型

$$\mathrm{pr}\colon \mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

が定まる．

命題 付録 B.2 (Hensel の補題の特殊な場合)**.** Abel 群の完全列

$$0 \longrightarrow 1 + p\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\mathrm{pr}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \longrightarrow 0$$

は分裂する．すなわち，準同型（持ちあげ）$\iota\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ で，$\mathrm{pr} \circ \iota = \mathrm{id}_{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times}$ が成り立つものが存在する．（ここで，$\mathrm{id}_{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times}\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ は恒等写像である．）従って，群 $\mathbb{Z}_p^\times$ は，

$$\mathbb{Z}_p^\times = \iota\big((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\big) \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$$

と直積分解する．特に，$\mathbb{Z}_p$ は 1 の原始 $p-1$ 乗根を含む．

[*13] $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は自然に直積集合 $\prod_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の部分集合と見なせるので，各 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に離散位相を入れると，$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ には，自然に直積位相空間 $\prod_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ から誘導される位相が入る．$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は，コンパクト位相空間 $\prod_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の閉部分集合なのでコンパクトである．

[*14] 先に「射影極限」で環 $\mathbb{Z}_p$ を定義して，その商体として $\mathbb{Q}_p$ を定義する文献も多いが，本稿では，「実数の構成」と対比しやすくするため，「p 進絶対値による $\mathbb{Q}$ の完備化」からスタートすることにした．

乗法に関する群 $1+p\mathbb{Z}_p$ の構造について考えよう．ここでは，$p \neq 2$ のときだけ考える[*15]．乗法群 $1+p\mathbb{Z}_p$ において，$\{1+p^n\mathbb{Z}_p\}_{n\geq 1}$ は，1 の基本近傍系をなすこと，及び $1+p\mathbb{Z}_p$ がコンパクト群であることに注意すると，$1+p\mathbb{Z}_p$ は，自然に $\varprojlim(1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^n\mathbb{Z}_p)$ と同型になることが分かる．n を正の整数とするとき，写像

$$f_n\colon \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow (1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^n\mathbb{Z}_p);\quad (a \mod p^n) \longmapsto \big((1+p)^a \mod p^n\big)$$

は，加法に関する群 $\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$ と乗法に関する群 $(1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^n\mathbb{Z}_p)$ の間の群としての同型写像である．さらに，図式：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{射影}} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\
{\scriptstyle f_{n+1}}\downarrow\simeq & & \simeq\downarrow{\scriptstyle f_n} \\
(1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^{n+1}\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\text{射影}} & (1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^n\mathbb{Z}_p)
\end{array}$$

は任意の正の整数 n で可換図式であるから，射影極限の間の同型写像:

$$f\colon \mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} 1+p\mathbb{Z}_p = \varprojlim(1+p\mathbb{Z}_p)/(1+p^n\mathbb{Z}_p)$$

が得られる．以上をまとめよう．

定理 付録 **B.3.** p を奇素数とする．

(i) 乗法群 $\mathbb{Z}_p^\times$ は群の直積

$$\mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1} \times (1+p\mathbb{Z}_p)$$

に分解する．ここで，$\mu_{p-1} = \iota\big((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\big)$ は位数 $p-1$ の巡回群であり，$1+\mathbb{Z}_p$ は位相群として $\mathbb{Z}_p$ と同型な位相群である．

(ii) 乗法群 $\mathbb{Q}_p^\times$ は群の直積

$$\mathbb{Q}_p^\times = \langle p\rangle \times \mathbb{Z}_p^\times = \langle p\rangle \times \mu_{p-1} \times (1+p\mathbb{Z}_p)$$

に分解する．ここで，$\langle p\rangle$ は p によって生成される $\mathbb{Z}$ と同型な位相群である．

参考文献

[CS] Coates, J. and Sujatha, R., *Cyclotomic Fields and Zeta Values*, Springer Berlin Heidelberg (2006).

[Gr] Greenberg, R., *Iwasawa theory—past and present*, Class field theory—its centenary and prospect (Tokyo, 1998), 335–385, Adv. Stud. Pure Math., 30, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[KKS] 黒川信重・栗原将人・斎藤毅 著,『数論 II 岩澤理論と保型形式』, 岩波書店 (2005).

[Ku] Kurihara, M., *Refined Iwasawa theory and Kolyvagin systems of Gauss sum type*, preprint (2008).

[MR] Mazur, B., and Rubin, K., *Kolyvagin systems*, Memoirs of the AMS Vol **168**, Number **799** (2004).

[MW] Mazur, B., and Wiles, A., *Class fields of abelian extension of* **Q**, Invent. math. **76** (1984), 179-330.

[Ne] Neukirch, J. 著, 内田敦紀 訳, 足立恒雄 監修『代数的整数論』, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2003).

[No] Northcott, D. G., *Finite free resolusions*, Cambridge Univ. press (1976).

[*15] 以下の議論は，素数 p が 2 かどうかで場合分けが必要である．本稿本編では，$p=2$ の場合は扱わないので，この場合に関しては次の事実を脚注に書くだけで済ませることにする：$p=2$ のとき，

$$1+2\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} \times 1+4\mathbb{Z}_2 \simeq \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}_2.$$

これは，$p \neq 2$ のときの議論を少しだけ修正すれば直ちに得られる．

[Oh1] Ohshita, T., *The Euler system of cyclotomic units and higher Fitting ideals*, preprint (2010), arXiv:0912.4854, Number Theory (math.NT).

[Oh2] 大下達也『岩澤主予想の紹介』, 第六回城崎新人セミナー報告集, 279-286.

[Ru1] Rubin, K., The main conjecture, Appendix to *Cyclotomic fields I and II* by S. Lang, Gradiate Texts in mathematics **121**, Springer-Verlag (1990), 397-419.

[Ru2] Rubin, K., *Kolyvagin's system of Gauss sums*, Arithmetic geometry, G. van der Geer et al eds, Progress in Math **89** (1991), 309-324.

[Wa] Washington, L., *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2nd edition, Gradiate Texts in mathematics **83**, Springer-Verlag (1997).

[Wi] Wiles, A., *The Iwasawa Conjecture for Totally Real Fields*, Annals of Mathematics **131** (3), 493-540. Springer-Verlag (1997).