閉リーマン多様体と離散群の L^2 不変量

尾國 新一*

愛媛大学大学院理工学研究科

この小文では, 第七回城崎新人セミナーでの筆者の講演に概ね基づいて*1, 閉リーマン多様体のガロア被覆や CW 複体のガロア被覆, および離散群などに対して定義される L^2 不変量 (L^2 スペクトル分布関数と L^2-Betti 数) を紹介します. 講演と同様に, 一般論には深入りせず, 簡単な具体例の計算を柱に話を進めます.

このような活気ある合宿セミナーに参加させていただいたことを運営委員の方々に感謝申し上げます.

1 はじめに

幾何的対象が与えれたとき, しばしば, ラプラシアンあるいはそれに類する (有界または非有界) 非負自己共役作用素が定義される. このとき, これらのスペクトルデータを見ることによって, もとの幾何的対象について何がわかるかを考えるのは, 昔から良く考えられてきた問題 ([7]) であり, 総称してスペクトル幾何と呼ばれている ([15] や [16] などを参照せよ). ラプラシアンと呼ばれているものを二つ挙げる. 一つはリーマン多様体のラプラシアンである. 高次の微分形式を考えれば, 高次のラプラシアンが定義される. 他の例としては, グラフのラプラシアンが有名である. グラフの一般化として CW 複体を採用すれば, やはり高次のチェインを考えることで高次のラプラシアンが現れる. 実際にこれらのスペクトルデータから, もとの図形に対する何らかの情報を取り出すということは, もとの図形がコンパクトである場合に特によく研究されている. 一方で, コンパクトでない図形を扱う際には, 連続スペクトルが出てくるなどの理由によって, スペクトルデータを適切に処理しないと, 良い情報を取り出すことができないことがしばしば起こる (2 節参照). この小文では, コンパクトではないが, 離散群の良い作用を持つ場合に, 情報の取り出し方の一つとして, L^2 スペクトル分布関数を導入し, 簡単な例で計算をする. また, L^2-Betti 数は L^2 スペクトル分布関数の 0 での値として導入し, 例の計算は, 多くの公式を用意した後に行う.

ここで, 簡単にではあるが, L^2 不変量についての文献を幾つか紹介しておく (原論文はほとんど挙げないので, 以下の文献の参考文献を見ていただきたい). まずは, [2] である. この論文では, L^2 指数定理が与えられているのだが, この定式化において L^2 指数なる L^2 不変量が導入されている. L^2-Betti 数もここで本質的には導入されている. 次に, [5] であるが, L^2 不変量について色々なことが短い文章の中に書かれており, 時々, 開いてみると良いだろう. 以下, 教科書やサーベイなどをいくつか紹介する. まずは, [10] であるが, これは筆者が L^2 不変量を勉強するのに使用した教科書である. この本を読み通すことは大変であるが, Preface および Introduction を読めば L^2 不変量について概観でき, 索引で Conjecture や Problem を引くことで問題意識も見えてくると思う. 次に, [9] および [11] であるが, これらは, [10] の要点を抜き出したようなもので, 前者は多様体と CW 複体に関連した話が中心で, 後者は代数的な立場からの話が中心である. どちらも [10] に比べて短く, ざっと読めるので, L^2 不変量について概観するのに適している. より読みやすいものとして, [3] を挙げておく. これは, CW 複体のホモロジー論を少し知っていれば読めると思われるので手に取っていただきたい. 最後に [13] であるが, これは, 捩じれ L^2 指数定理についての解説に主眼が置かれており, [10] では書かれていない部分でもあるので,

---

* oguni@math.sci.ehime-u.ac.jp

*1 2010 年 3 月に伊豆で行われた幾何学的群論勉強会において, 同タイトルで講演を行ったのでそれにも基づいています.

一読の価値があると思う.

ここで, 三つ注意しておく. 一つ目は, この小文での L^2-Betti 数の定義はあまり標準的ではないものの, 上記で紹介した文献で定義されているのと同値なものであるということである. 二つ目は, この小文で L^2 スペクトル分布関数と呼んでいるものは, 通常, 単に, スペクトル分布関数, あるいは, スペクトル密度関数と呼ばれており, 'L^2' はつけないのだが, ここでは L^2 不変量であることを強調して 'L^2' という接頭語を使用していることである. 三つ目は, この小文では, [10] に載っているものに関しては, 通常, これの参照箇所を引用し, 必ずしも原論文にまでさかのぼっていないので, 原論文を知りたい方は [10] の参考文献を参照してほしいということである.

2 ラプラシアンのスペクトル分解とスペクトル分布関数

この節の目的は, 与えられた非負自己共役作用素のスペクトルデータを記述する関数であるスペクトル分布関数を具体的に, いくつかの例で計算することで, スペクトルの扱い方に慣れることと, 次節で L^2 不変量を導入することへの動機を持つことである. L^2 不変量は, この節では考えていないことを注意しておく. スペクトル分布関数の定義を書く前に, まずは行列の場合を計算してみよう.

例 (非負エルミート行列のスペクトル分布関数)

A を n 次非負エルミート行列とする. この固有値は高々 n 個の非負の実数であるので, r 個あるとし, 小さい方から順に並べて, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ と書くことにする. このとき, それぞれの重複度, すなわち, 固有値 λ_i の固有空間の次元を m_i と書くとき, A のスペクトル分布関数が以下で定義される:

$$N^A(\lambda) := \sum_{\lambda_i \le \lambda} m_i \quad (\lambda \in [0, \infty)),$$

すなわち, $N^A(\lambda)$ は λ 以下の固有値の個数を重複度込みで数えたものである. A のスペクトル分布関数を考えることと, 通常 A のスペクトルデータとして用いられる

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ m_1 & \cdots & m_r \end{pmatrix}$$

を考えることは等価である. ここで, N^A を少し言い換えてみる. A の固有値 λ_i の固有空間を $V(\lambda_i) \subset \mathbb{C}^n$ とし, そこへの射影 $P(\lambda_i)$, すなわち, n 次正方行列であって $\operatorname{Im} P(\lambda_i) = V(\lambda_i), P(\lambda_i)^2 = P(\lambda_i), P(\lambda_i)^* = P(\lambda_i)$ を満たすもの考える. このとき, もちろん $m_i = \dim V(\lambda_i) = \operatorname{tr} P(\lambda_i)$ であるから,

$$N^A(\lambda) = \sum_{\lambda_i \le \lambda} \operatorname{tr} P(\lambda_i) \quad (\lambda \in [0, \infty))$$

である. また,

$$A = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i)$$

となる. ちなみに

$$P(\lambda_i) = \prod_{j \ne i} \frac{A - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

である. さて, N^A をもう少しだけ言い換えておく. $E^A(\lambda) := \sum_{\lambda_i \le \lambda} P(\lambda_i)$ を考えると, これは射影なので, E^A は $[0, \infty)$ 上の射影値関数である. これを考えることと,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ P(\lambda_1) & \cdots & P(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

を考えることはやはり等価である. E^A を A によるスペクトル測度 (あるいは単位の分解) と呼ぶ. これを用いると,

$$N^A(\lambda) = \operatorname{tr} E^A(\lambda)$$

となる．また, E^A によるルベーグ・スティルチェス積分を用いて,

$$A = \int_{[0,\infty)} \lambda dE^A(\lambda)$$

が成り立つ (これを A のスペクトル分解と呼ぶ).

ここで, 一般の非負自己共役作用素 A のスペクトル分布関数

$$N^A : [0,\infty) \to [0,\infty]$$

の定義を与える．これは, A のスペクトル分解

$$A = \int_{[0,\infty)} \lambda dE^A(\lambda)$$

を与えるスペクトル測度 E^A を用いて,

$$N^A(\lambda) = \operatorname{tr} E^A(\lambda)$$

と定義される．$E^A(\lambda)$ は, いわゆる作用素解析によって, $[0,\lambda]$ 上の定義関数 $\chi_{[0,\lambda]}$ を用いて,

$$E^A(\lambda) = \chi_{[0,\lambda]}(A)$$

と求まることを注意しておく．スペクトル分解や作用素解析については, [1] 等を参照せよ．

以下では, ラプラシアンを天下り的に与えているが, 統一的なラプラシアンの与え方については, 3.2 節を参照せよ．

例 ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のラプラシアンのスペクトル分布関数)
$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のラプラシアン $\Delta = -(\frac{d}{dt})^2$ を $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 上の非有界非負自己共役作用素に拡張して考える．このとき, スペクトルデータ, すなわち, 固有値を小さい順に左から並べて, 各々の下にその重複度を書いたものは,

$$\begin{pmatrix} 0 & (2\pi)^2 & \cdots & (2\pi k)^2 & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & \cdots \end{pmatrix}$$

となる．実際, $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の正規直交系として $\{\chi_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\} \cup \{\exp(2\pi ikt), \exp(-2\pi ikt)\}_{k\in\mathbb{N}}$ がとれ, $\mathbb{C}\chi_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ が固有値 0 の固有空間で, $\mathbb{C}\exp(2\pi ikt) \oplus \mathbb{C}\exp(-2\pi ikt)$ が固有値 $(2\pi k)^2$ の固有空間であることが確かめれる．スペクトル分布関数は, 行列の場合と同じように考えると, λ 以下の固有値の個数を重複度込みで数えることで,

$$N^\Delta(\mathbb{R}/\mathbb{Z})(\lambda) = 1 + \sum_{(2\pi k)^2 \le \lambda} 2 = 1 + 2\left[\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi}\right] \quad (\lambda \in [0,\infty))$$

と計算されるのだが, ここでは, 上記の定義に従って, $N^\Delta(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ を計算してみよう．その際に, フーリエ変換を用いる．$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}$ に関するフーリエ変換 $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to \ell^2\mathbb{Z}$ は, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ に対して, $\mathcal{F}(f)(k) := \int_{[0,1]} f(t)\exp(-2\pi ikt)dt$ と定義され, これはヒルベルト空間としての同型を与えている．任意の $\hat{f} \in \ell^2\mathbb{Z}$ に対して, $\mathcal{F} \circ \Delta \circ \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(k) = (2\pi k)^2\hat{f}(k)$ が成り立つこと, および $E^\Delta(\lambda) = \chi_{[0,\lambda]}(\Delta)$ が成り立つことから,

$$\mathcal{F} \circ E^\Delta(\lambda) \circ \mathcal{F}^{-1} = M_{\chi_{\{k\in\mathbb{Z} |\ -\lambda^{1/2} \le 2\pi k \le \lambda^{1/2}\}}}$$

となる．ここで, $M_{\chi_{\{k\in\mathbb{Z} |\ -\lambda^{1/2} \le 2\pi k \le \lambda^{1/2}\}}}$ は $\chi_{\{k\in\mathbb{Z} |\ -\lambda^{1/2} \le 2\pi k \le \lambda^{1/2}\}}$ による掛け算作用素である．したがって,

$$N^\Delta(\mathbb{R}/\mathbb{Z})(\lambda) = \operatorname{tr} E^\Delta(\lambda) = \operatorname{tr} M_{\chi_{\{k\in\mathbb{Z} |\ -\lambda^{1/2} \le 2\pi k \le \lambda^{1/2}\}}}$$
$$= \#\{k \in \mathbb{Z} |\ -\lambda^{1/2} \le 2\pi k \le \lambda^{1/2}\} = 1 + 2\left[\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi}\right] \quad (\lambda \in [0,\infty))$$

となる.

例 ($\mathbb{R}$ 上のラプラシアンのスペクトル分布関数)
$\mathbb{R}$ 上のラプラシアン $\Delta = -(\frac{d}{dt})^2$ を $L^2(\mathbb{R})$ 上の非有界非負自己共役作用素に拡張して考える. このとき, 抽象的にはスペクトル分解 $\Delta = \int_{[0,\infty)} \lambda dE^{\Delta}(\lambda)$ がある. そこで, フーリエ変換を用いて, スペクトル測度 $E^{\Delta}(\lambda)$ を求めてみる. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ に関するフーリエ変換 $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ は, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(-2\pi i\xi t)dt$ と定義され, これはヒルベルト空間としての同型を与えている. 任意の $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $\mathcal{F} \circ \Delta \circ \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(\xi) = (2\pi\xi)^2\hat{f}(\xi)$ が成り立つこと, および $E^{\Delta}(\lambda) = \chi_{[0,\lambda]}(\Delta)$ が成り立つことから,

$$\mathcal{F} \circ E^{\Delta}(\lambda) \circ \mathcal{F}^{-1} = M_{\chi_{\{\xi\in\mathbb{R} |\ -\lambda^{1/2}\leq 2\pi\xi\leq\lambda^{1/2}\}}}$$

となる. したがって,

$$N^{\Delta}(\mathbb{R})(\lambda) = \operatorname{tr} E^{\Delta}(\lambda) = \operatorname{tr} M_{\chi_{\{\xi\in\mathbb{R} |\ -\lambda^{1/2}\leq 2\pi\xi\leq\lambda^{1/2}\}}}$$
$$= \begin{cases} 0 & (\lambda = 0) \\ \infty & (\lambda \in (0,\infty)) \end{cases}$$

となる. これは, 明らかに情報が落ちすぎている. より多くの情報が残っている L^2 スペクトル分布関数の計算を 3.3 節で行う.

例 ($\mathbb{Z}$ 上のラプラシアンのスペクトル分布関数)
$\mathbb{Z}$ 上のラプラシアン $\Delta = 2-(l_{+1}+l_{-1})$ を $\ell^2\mathbb{Z}$ 上の有界非負自己共役作用素として考える. ここで, l_{+1} と l_{-1} は, $\ell^2\mathbb{Z}$ の正規直交系 $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ に対して, $l_{+1}\delta_k := \delta_{1+k}$ および $l_{-1}(\delta_k) := \delta_{k-1}$ としたものを線形に拡張した $\ell^2\mathbb{Z}$ 上のユニタリー作用素である. このとき, 抽象的にはスペクトル分解 $\Delta = \int_{[0,\infty)} \lambda dE^{\Delta}(\lambda)$ がある. そこで, フーリエ変換を用いて, スペクトル測度 $E^{\Delta}(\lambda)$ を求めてみる. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}$ に関するフーリエ変換 $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to \ell^2\mathbb{Z}$ については, すでに述べた. 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ に対して, $\mathcal{F}^{-1} \circ \Delta \circ \mathcal{F}(f)(t) = 2(1-\cos(2\pi t))f(t)$ が成り立つこと, および $E^{\Delta}(\lambda) = \chi_{[0,\lambda]}(\Delta)$ が成り立つことから,

$$\mathcal{F}^{-1} \circ E^{\Delta}(\lambda) \circ \mathcal{F} = M_{\chi_{\{t\in\mathbb{R}/\mathbb{Z} |\ 2(1-\cos(2\pi t))\leq\lambda\}}}$$

となる. したがって,

$$N^{\Delta}(\mathbb{Z})(\lambda) = \operatorname{tr} E^{\Delta}(\lambda) = \operatorname{tr} M_{\chi_{\{t\in\mathbb{R}/\mathbb{Z} |\ 2(1-\cos(2\pi t))\leq\lambda\}}}$$
$$= \begin{cases} 0 & (\lambda = 0) \\ \infty & (\lambda \in (0,\infty)) \end{cases}$$

となる. これは, 明らかに情報が落ちすぎている. より多くの情報が残っている L^2 スペクトル分布関数の計算を 3.3 節で行う.

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ 上のラプラシアンの具体的解析は, より一般の (よい) 多様体上のラプラシアン (やそれに類する楕円型作用素) の解析の原型と見ることができる. 例えば, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ のラプラシアンに対して, $E^{\Delta}(\lambda)$ は, 滑らかな積分核を持ち, 特に, $\operatorname{Im} E^{\Delta}(\lambda)$ は C^{∞} 関数からなる. また, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の場合には, $\operatorname{Im} E^{\Delta}(\lambda)$ は有限次元で, スペクトルは離散的である. これらを一般の多様体上で考えるには, 'elliptic estimate', 'Sobolev embedding' および 'Rellich's theorem' などが必要となる ([14, Chapter 5] などを参照せよ). また, $N^{\Delta}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})(\lambda)$ は, λ が大きいところで $\frac{1}{\pi}\lambda^{1/2}$ のように振舞っており, これは, Weyl の漸近分布公式の最も単純な場合を与えている ([16] や [14] などを参照せよ). 3.3 節の終わりでも幾つか, L^2 スペクトル関数に関連した事柄についてコメントするので参照してほしい.

3 L^2 スペクトル分布関数と L^2-Betti 数

3.1 節および 3.2 節は一般論である．3.3 節および 3.4 節では具体例を定義に基づいて考える．

3.1 群環と von Neumann 群環

G を離散群とするとき, G を基底とする $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $\mathbb{C}G$ と書く．$\mathbb{C}G$ 上に積が, 以下のように定まる: $\sum_{g\in G}\alpha_g g, \sum_{h\in G}\beta_h h \in \mathbb{C}G$ に対して,

$$(\sum_{g\in G}\alpha_g g)(\sum_{h\in G}\beta_h h) := \sum_{g,h\in G}\alpha_g\beta_h(gh) = \sum_{g\in G}(\sum_{g=kh}\alpha_k\beta_h)g.$$

$\mathbb{C}G$ は G の群環と呼ばれる．次に G 上の関数からなるヒルベルト空間 $\ell^2 G$ を考える．これは, $\{\delta_g\}_{g\in G}$ を正規直交系に持つものとして定義される．ここで, δ_g は G 上の関数であって,

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & (h = g) \\ 0 & (h \neq g) \end{cases}$$

を満たす関数である．$g, k \in G$ に対して, $l_g\delta_k := \delta_{gk}$, $r_g\delta_k := \delta_{kg^{-1}}$ を考えると, l_g, r_g は, $\ell^2 G$ 上のユニタリー変換を定める．この G の表現を群環 $\mathbb{C}G$ の作用に線型に拡張して, 左正則表現および右正則表現

$$l : \mathbb{C}G \ni \sum_{g\in G}\lambda_g g \mapsto \sum_{g\in G}\lambda_g l_g \in B(\ell^2 G)$$
$$r : \mathbb{C}G \ni \sum_{g\in G}\lambda_g g \mapsto \sum_{g\in G}\lambda_g r_g \in B(\ell^2 G)$$

を得る．$\mathcal{N}G \subset B(\ell^2 G)$ を $B(\ell^2 G)$ の元であって, 右正則表現と可換なもの全体のなす集合とし, これを von Neumann 群環と呼ぶ．特に, $l(\mathbb{C}G) \subset \mathcal{N}G$ である．これは

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{N}G} : \mathcal{N}G \ni A \mapsto \langle A\delta_e, \delta_e\rangle_{\ell^2 G} \in \mathbb{C}$$

なるトレースを持つ．$U \in \mathcal{N}G$ をユニタリー作用素とするとき, 任意の $A \in \mathcal{N}G$ に対して, $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}G}(U^*AU) = \mathrm{tr}_{\mathcal{N}G}(A)$ が確認できる．また, $\sum_{g\in G}\lambda_g l_g \in l(\mathbb{C}G)$ に対して, $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}G}(\sum_{g\in G}\lambda_g l_g) = \lambda_e$ であることを注意しておく．G のユニタリー表現空間 H_G であって, あるヒルベルト空間 H と G の右正則表現 $\ell^2 G$ のテンソルの完備化から決まる G のユニタリー表現 $H\overline{\otimes}\ell^2 G$ とユニタリー同型なものを考える．H_G 上の射影であって, G 作用と可換なもののトレースを定義しよう．まず, ヒルベルト空間 H および, G 同変ユニタリー同型 $U : H_G \to H\overline{\otimes}\ell^2 G$ を一つ固定する．さらに, H の正規直交系 $\{e_i\}_{i\in I}$ を一つ固定する．このとき, H_G 上の射影 P であって, G 作用と可換なもののトレースを $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}G} P := \sum_{i\in I}\langle UPU^{-1}(e_i\otimes\delta_e), e_i\otimes\delta_e\rangle_{H\overline{\otimes}\ell^2 G} \in [0,\infty]$ で定義する．これは, H やその正規直交系や U の取り方によらずに決まることが, 実際に確認できる．

3.2 L^2 スペクトル分布関数と L^2-Betti 数の定義

以下, G は離散群とする．

閉多様体 $\underline{M}$ の G ガロア被覆 M に対して, L^2 不変量を定義する．$\underline{M}$ のリーマン計量を一つ固定し, これを M に持ち上げておく．このとき, M 上の L^2 微分形式のなすヒルベルト空間が定義され, これを $A^k_{(2)}(M)$ と書くと, この上に外微分 d^k も閉作用素として拡張し, $d^k_{(2)}$ と書く．また, $A^k_{(2)}(M)$ は G 作用を持ち, $d^k_{(2)}$ は G 同変である．まとめると, コチェイン複体:

$$\cdots \xleftarrow{d^2_{(2)}} A^2_{(2)}(M) \xleftarrow{d^1_{(2)}} A^1_{(2)}(M) \xleftarrow{d^0_{(2)}} A^0_{(2)}(M).$$

が得られたことになり, これを M のヒルベルト G コチェイン複体と呼ぶことにする. このとき, M の L^2 コホモロジーを

$$H^k_{(2)}(M) := \operatorname{Ker} d^k_{(2)} / \overline{\operatorname{Im} d^{k-1}_{(2)}}$$

と定義する. ここで, $\overline{\operatorname{Im} d^{k-1}_{(2)}}$ は, ヒルベルト空間 $A^k_{(2)}(M)$ において, $\operatorname{Im} d^{k-1}_{(2)}$ の閉包をとったものである. 通常, これの 'von Neumann 次元' として $(M;G)$ の L^2-Betti 数が定義されるが, ここでは (もちろん同値な定義であるが) 異なる定義を以下で与える. まず, M 上の k 次ラプラシアンを定義しよう. それは, $A^k_{(2)}(M)$ 上の非有界非負自己共役作用素で $\Delta^k := (d^k_{(2)})^* d^k_{(2)} + d^{k-1}_{(2)}(d^{k-1}_{(2)})^*$ で定義される. ここで, スペクトル分解

$$\Delta^k = \int_{[0,\infty)} \lambda dE^{\Delta^k}(\lambda)$$

を考える. $A^k_{(2)}(M)$ は $A^k_{(2)}(\underline{M}) \overline{\otimes} \ell^2 G$ と G のユニタリー表現として同型であることに注意すると,

$$N^{\Delta^k}(M;G)(\lambda) := \operatorname{tr}_{\mathcal{N}G} E^{\Delta^k}(\lambda)$$

が定義でき, これを $(M;G)$ の L^2 スペクトル分布関数と呼ぶ. そして, $(M;G)$ の L^2-Betti 数を

$$b^k_{(2)}(M;G) := N^{\Delta^k}(M;G)(0)$$

と定義する. $N^{\Delta^k}(M;G)(\lambda)$ を計算するときには, 積分核表示を用いる方がやさしいことがあるので, それを与えておこう. $E^{\Delta^k}(M;G)(\lambda)$ に対して, 積分核 $e^{\Delta^k}(M;G)(\lambda)(x,y)$ $(x, y \in M)$ が存在して, 任意の $f \in L^2(M)$ に対して,

$$(E^{\Delta^k}(M;G)(\lambda)f)(x) = \int_M e^{\Delta^k}(M;G)(\lambda)(x,y)f(y)dy$$

が成り立つことに注意する. このとき, M の G による基本領域 K を取ると,

$$N^{\Delta^k}(M;G)(\lambda) = \int_K e^{\Delta^k}(M;G)(\lambda)(x,x)dx$$

が成り立つことが確認でき, これを積分核表示と呼ぶ.

次に, 有限個のセルからなる CW 複体の G ガロア被覆に対して, L^2 不変量を定義する. 有限個のセルからなる CW 複体の G ガロア被覆として, 特に, ケーリーグラフが典型例であるので, 定義しておく.

G を有限生成群とし, その有限生成系 S をとる. このケーリーグラフ $C(G,S)$ とは, 以下のように定義される 1 次元 CW 複体である.

- 0 セル (頂点) 全体のなす集合 $C(G,S)_0$ は G,
- 1 セル (辺) 全体のなす集合 $C(G,S)_1$ は $S \times G$,
- 貼り付け写像は, $\partial : S \times G \ni (s,g) \mapsto (sg, g) \in G \times G$.

これは, 自由な右 G 作用を持つ. 特に, これは $\bigvee_{\#S} S^1$ の G ガロア被覆になっている. 1 セル $(s,g) \in S$ に向きを入れる必要があれば, 始点が g で, 終点が sg となるように入れることにする. 他に, CW 複体の G ガロア被覆の重要な例として, G の分類空間 BG ($k(G,1)$ ともかく) の普遍被覆空間 EG がある (ただし, BG は有限個のセルからなる CW 複体として実現できるとは限らない). これは, G 同変ホモトピー同値を除いて一意に決まる. また, G のケーリーグラフに高次のセルを貼り付けていくことで実現することもできるので, 1 スケルトンがケーリーグラフであると考えてよい.

G を離散群, $\underline{X}$ を有限個のセルからなる CW 複体, X を $\underline{X}$ の G ガロア被覆とする. このとき, X の $\mathbb{C}$ 上のチェイン複体

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$$

は $\mathbb{C}G$ チェイン複体とみなせる．ここで, X の各々のセルに G の作用で不変な向きを固定し, それを $C_k(X)$ の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての基底とみなすと, これは G 同変な基底である．これが正規直交系になるようにエルミート内積を定め, 完備化を行うことで得られるヒルベルト空間を $C_k^{(2)}(X)$ とかく．このとき, ∂_k が有界作用素 $\partial_k^{(2)}$ として拡張されることが確かめられるので, 次のチェイン複体が定まる:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3^{(2)}} C_2^{(2)}(X) \xrightarrow{\partial_2^{(2)}} C_1^{(2)}(X) \xrightarrow{\partial_1^{(2)}} C_0^{(2)}(X).$$

これを X のヒルベルト G チェイン複体と呼ぶことにする．このとき, X の L^2 ホモロジーを

$$H_k^{(2)}(X) := \operatorname{Ker}\partial_k^{(2)}/\overline{\operatorname{Im}\partial_{k+1}^{(2)}}$$

と定義する．ここで, $\overline{\operatorname{Im}\partial_{k+1}^{(2)}}$ は, ヒルベルト空間 $C_k^{(2)}(X)$ において, $\operatorname{Im}\partial_{k+1}^{(2)}$ の閉包をとったものである．通常, これの 'von Neumann 次元' として $(X;G)$ の L^2-Betti 数が定義されるが, ここでは (もちろん同値な定義であるが) 異なる定義を以下で与える．まず, X 上の k 次ラプラシアンを定義しよう (組み合わせ的 k 次ラプラシアンと言うこともある)．それは, $C_k^{(2)}(X)$ 上の有界非負自己共役作用素で $\Delta_k := (\partial_k^{(2)})^*\partial_k^{(2)} + \partial_{k+1}^{(2)}(\partial_{k+1}^{(2)})^*$ で定義される．ここで, スペクトル分解

$$\Delta_k = \int_{[0,\infty)} \lambda dE^{\Delta_k}(\lambda)$$

を考える．$C_k^{(2)}(X)$ は $C_k^{(2)}(\underline{X})\overline{\otimes}\ell^2 G$ と G のユニタリー表現として同型であることに注意すると,

$$N^{\Delta_k}(X;G)(\lambda) := \operatorname{tr}_G E^{\Delta_k}(\lambda)$$

が定義でき, これを $(X;G)$ の L^2 スペクトル分布関数と呼ぶ．そして, $(X;G)$ の L^2-Betti 数を

$$b_k^{(2)}(X;G) := N^{\Delta_k}(X;G)(0)$$

と定義する．

ケーリーグラフの場合に少し計算してみる．$C(G,S)$ のヒルベルト G チェイン複体

$$C_1^{(2)}(C(G,S)) \xrightarrow{\partial_1^{(2)}} C_0^{(2)}(C(G,S)).$$

は, $S := \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ とするとき,

$$\bigoplus_{i=1,\ldots,N} \ell^2 G \xrightarrow{(l_{s_1}-l_e,\ldots,l_{s_N}-l_e)} \ell^2 G.$$

と同一視できることは簡単に確認できる．この同一視のもとで,

$$(\partial_1^{(2)})^* = (l_{s_1}-l_e,\ldots,l_{s_N}-l_e)^* = \begin{pmatrix} l_{s_1^{-1}} - l_e \\ \vdots \\ l_{s_N^{-1}} - l_e \end{pmatrix}$$

なので,

$$\Delta_0 := \partial_1^{(2)}(\partial_1^{(2)})^* = 2\#S - \sum_{s\in S}(l_s + l_{s^{-1}})$$

となる．これは, $C(G,S)$ 上の単純ランダムウォークを与える推移確率作用素 $P_S := \frac{1}{2\#S}\sum_{s\in S}(l_s + l_{s^{-1}})$ を用いて定義されるグラフラプラシアン $\Delta_S := 1 - P_S$ の $2\#S$ 倍に他ならない．例えば, $\mathbb{Z}$ の生成系として, $\{+1\}$ をとると, 2 節で考えた $\mathbb{Z}$ 上のラプラシアンが得られる．

ここで, 多様体と CW 複体に関連した L^2 不変量の関係, すなわち, L^2-de Rham の定理を紹介しておく．L^2-Betti 数に関しては, Dodziuk によって示され, L^2 スペクトル分布関数に関しては Efremov によって主張された ([10, Theorem 1.59, 2.68] を参照せよ).

定理 3.1 (J. Dodziuk '77, A. Efremov '91). G を離散群, $\underline{M}$ を閉多様体とし, $\underline{M}$ の G ガロア被覆 M を考える．$\underline{M}$ にはリーマン計量および三角形分割が与えられているとする．この三角形分割が与える CW 複体 (単体複体) を $\underline{X}$ と書く．このとき, M にリーマン計量および三角形分割が持ち上げられ, この三角形分割が与える G-CW 複体 (G 単体複体) を X と書くとき, 以下が成り立つ:

$$b^k_{(2)}(M;G) = b^{(2)}_k(X;G);$$
$$N^{\Delta^k}(M;G) \simeq N^{\Delta_k}(X;G),$$

ここで, 後者はある $C > 0$ が存在して, 任意の $\lambda \leq \frac{1}{C}$ に対して, $N^{\Delta^k}(M;G)(\lambda) \leq N^{\Delta_k}(X;G)(C\lambda)$ かつ $N^{\Delta^k}(M;G)(C\lambda) \geq N^{\Delta_k}(X;G)(\lambda)$ となることを意味する．

特に, L^2-Betti 数および L^2 スペクトル分布関数は, $\underline{M}$ のリーマン計量の取り方によらない．そこで, M として普遍被覆を取ったときを考え, $b^k_{(2)}(M, \pi_1(\underline{M}))$ のことを $\underline{M}$ の L^2-Betti 数と呼ぶこともある (この小文では, タイトルとここ以外でこの呼び方を使用していない).

3.3 L^2 スペクトル分布関数の計算例

例 ($\mathbb{Z}$ 上のラプラシアンの L^2 スペクトル分布関数)
$\mathbb{Z}$ 上のラプラシアン $\Delta = 2 - (l_{+1} + l_{-1})$ を考える．これは, ケーリーグラフ $C(\mathbb{Z}, \{+1\})$ の 0 次ラプラシアンである．

$$\mathcal{F}^{-1} \circ E^{\Delta}(\lambda) \circ \mathcal{F} = M_{\chi_{\{t\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}|\ \ 2(1-\cos(2\pi t))\leq\lambda\}}}$$

であったから,

$$N^{\Delta}(C(\mathbb{Z},\{+1\});\mathbb{Z})(\lambda) = \mathrm{tr}_{\mathcal{N}\mathbb{Z}}\, E^{\Delta}(\lambda) = \langle E^{\Delta}(\lambda)\delta_0, \delta_0\rangle_{\ell^2\mathbb{Z}} = \langle M_{\chi_{\{t\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}|\ \ 2(1-\cos(2\pi t))\leq\lambda\}}}\chi_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}, \chi_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\rangle_{L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}$$
$$= \mathrm{Vol}\{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} |\ 2(1-\cos(2\pi t)) \leq \lambda\} = \frac{\cos^{-1}(1-\frac{\lambda}{2})}{\pi} \quad (\lambda \in [0,\infty))$$

となる．

例 ($\mathbb{R}$ 上のラプラシアンの L^2 スペクトル分布関数)
$\mathbb{R}$ 上のラプラシアン $\Delta = -(\frac{d}{dt})^2$ を考える．積分核表示を用いて $N^{\Delta}(\mathbb{R};\mathbb{Z})(\lambda)$ の計算をしよう．フーリエ変換によって, $t \in \mathbb{R}$ におけるディラック超関数 δ_t は $\exp(2\pi i\xi t)$ にうつることおよび,

$$\mathcal{F} \circ E^{\Delta}(\lambda) \circ \mathcal{F}^{-1} = M_{\chi_{\left[-\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \leq \xi \leq \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi}\right]}}$$

に注意すると, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$e^{\Delta}(\mathbb{R};\mathbb{Z})(\lambda)(t,t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\left[-\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \leq \xi \leq \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi}\right]}(\xi) d\xi = \frac{\lambda^{1/2}}{\pi}$$

とわかる．これを $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Z}$ による基本領域 $[0,1)$ 上で積分することで,

$$N^{\Delta}(\mathbb{R};\mathbb{Z})(\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \quad (\lambda \in [0,\infty))$$

となる．

2 節の終わりにコメントしたことへの追加を書く．$N^{\Delta}(\mathbb{R};\mathbb{Z})(\lambda)$ は, λ が大きいところで $N^{\Delta}(\mathbb{R})(\lambda)$ と同様のふるまい (すなわち, $\frac{1}{\pi}\lambda^{1/2}$) をしており, これは閉リーマン多様体とそのガロア被覆に対して, 一般に成り立つ関係の最も単純な場合である．また, $N^{\Delta}(\mathbb{R};\mathbb{Z})(\lambda)$ と $N^{\Delta}(C(\mathbb{Z},\{+1\});\mathbb{Z})(\lambda)$ は, λ が小さいところで, $\frac{1}{\pi}\lambda^{1/2}$ のように振舞っており, これも閉リーマン多様体のガロア被覆とそのガロア群に対して, 一般に成り立つ関係の最も単純な場合である．

3.4 L^2-Betti 数が消えない例

L^2-Betti 数の具体的計算は 4.2 節に譲り, ここではそれが消えない例を L^2-Betti 数の定義に基づいて紹介したい. k 次 L^2-Betti 数が消えないことを言うには, L^2 チェインまたは L^2 微分形式でラプラス方程式の解で非自明なものを具体的に与えればよい. これを実際に行うのは, 面白い問題ではあるが, 一般には難しく, 通常, 指数定理と結びつけて間接的に示される ([2] や [13] などを参照せよ).

例 ($E\mathbb{F}^2$ 上の 1 次 L^2 調和チェイン)
ランク 2 の自由群を考える. $\mathbb{F}^2$ の生成系 S として a, b の 2 元からなるものを取ると, これに関するケーリーグラフはツリーだから可縮であるので, これを分類空間の普遍被覆 $E\mathbb{F}^2$ として採用し, $b_1^{(2)}(E\mathbb{F}^2; \mathbb{F}^2) \neq 0$ を示す. $E\mathbb{F}^2$ 上の L^2-1 チェインであって, ラプラス方程式の解になるものを一つ与えればよい. ケーリーグラフの任意の 1 セルは, 0 セル全体のなす集合である $\mathbb{F}^2$ のある二つの元を結んでおり, $\{a, b\}$ に関する語距離 k と語距離 $k+1$ のものを結ぶのは, 4×3^k 本あることに注意する. 語距離 k と語距離 $k+1$ のものを結ぶ 4×3^k 本に, 重み $\pm\frac{1}{3^k}$ をつけて, 非負整数 k を走らせて足しあげると, $\pm$ をうまく選ぶことで, 1 次 L^2 調和チェインを作ることができる.

例 ($\mathbb{H}^2$ 上の 1 次 L^2 調和形式)
双曲平面 $\mathbb{H}^2$ を種数 g の閉曲面の普遍被覆と考え, $b^1_{(2)}(\mathbb{H}^2; \pi_1(\Sigma_g)) \neq 0$ を示す. $\mathbb{H}^2$ 上の L^2-1 形式であって, ラプラス方程式の解になるものを一つ与えればよい. 例えば,

$$\frac{\sin\theta}{\sinh r}\exp\left(\int_1^r \frac{ds}{\sinh s}\right)dr + \frac{\cos\theta}{\sinh r}\exp\left(\int_1^r \frac{ds}{\sinh s}\right)\sinh r d\theta$$

がそうである. ここで, $\mathbb{H}^2$ のリーマン計量を

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2$$

と表す座標を使用している. これは, 一般次元の双曲空間 $\mathbb{H}^n$ 上の L^2-調和形式が $\frac{n}{2}$ 次元だけで生き残ることの Dodziuk による証明を参照して書き下したものである.

4 L^2-Betti 数の性質と計算例

この節では, L^2-Betti 数の性質を列挙した後, これらを使って, いくつかの例で L^2-Betti 数を求める. また, 幾何学的群論および測度論的群論と L^2-Betti 数の関連についても触れる. この節では, L^2 スペクトル分布関数を扱わないので, その性質については, [10, Chapter 2] を参照せよ.

4.1 自由な右同変 CW 複体の L^2-Betti 数

3.2 節では, 有限個のセルからなる CW 複体のガロア被覆に対して, L^2-Betti 数を定義したが, より一般に自由な右 G-CW 複体に対して L^2-Betti 数なる族が定義される. すなわち, 任意の自由な右 G-CW 複体 X に対して, L^2-Betti 数なる族

$$\{b_k^{(2)}(X; G)\}_{k=0,1,\dots} \in \prod_{k=0,1,\dots} [0, \infty]$$

が定まる ([10, Chapter 6] を参照せよ). これは以下のような性質を満たす.

1. 有限群

X を自由な右 G-CW 複体とする. G が有限群のとき, 次が成り立つ;

$$b_k^{(2)}(X;G) = \frac{1}{\#G} b_k(X),$$

ここで, $b_k(X)$ は, X の Betti 数. 特に G を自明群とすると,

$$b_k^{(2)}(X;\{e\}) = b_k(X).$$

2. G ホモトピー不変性

X, Y を自由な右 G-CW 複体とする. d-連結な G 写像 $f : X \to Y$ が存在すれば, 次が成り立つ;

$$\begin{cases} b_k^{(2)}(X;G) = b_k^{(2)}(Y;G) & (0 \leq k \leq d-1) \\ b_d^{(2)}(X;G) \geq b_d^{(2)}(Y;G) \end{cases}$$

特に f が G 弱ホモトピー同値写像ならば, 次が成り立つ;

$$b_k^{(2)}(X;G) = b_k^{(2)}(Y;G) \ (k \geq 0).$$

3. 0 次 L^2-**Betti** 数

X を自由な右 G-CW 複体とする. これが連結ならば次が成り立つ;

$$b_0^{(2)}(X;G) = \begin{cases} \frac{1}{\#G} & (\#G < \infty) \\ 0 & (\#G = \infty) \end{cases}$$

4. オイラー数 $=$ L^2 オイラー数

X を自由な右 G 有限 CW 複体とするとき, 次が成り立つ;

$$\chi(X/G) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k^{(2)}(X;G).$$

5. モース不等式

X を自由な右 G 有限型 CW 複体とするとき, 次が成り立つ;

$$(-1)^d \sum_{0 \leq k \leq d} (-1)^k \#(\text{k-cells of } X/G) \geq (-1)^d \sum_{0 \leq k \leq d} (-1)^k b_k^{(2)}(X;G).$$

6. ポアンカレ双対

M を自由な右 G 余閉多様体で次元を n とするとき, M が向き付け可能ならば, 次が成り立つ;

$$b_{n-k}^{(2)}(M;G) = b_k^{(2)}(M;G).$$

7. 誘導 CW 複体

X を自由な右 G 有限型 CW 複体とする. $G < L$ に対して, 次が成り立つ;

$$b_k^{(2)}(X \times_G L; L) = b_k^{(2)}(X;G).$$

8. キュネスの公式

X を自由な右 G-CW 複体, Y を自由な右 $H-CW$ 複体とするとき, 次が成り立つ;

$$b_k^{(2)}(X \times Y; G \times H) = \sum_{i+j=k} b_j^{(2)}(X;G) b_j^{(2)}(Y;H).$$

9. 制限 CW 複体
   X を自由な右 G-CW 複体とする．$H < G$ で $\#(G/H) < \infty$ とするとき, 次が成り立つ;

$$b_k^{(2)}(X; H) = \#(G/H) b_k^{(2)}(X; G).$$

詳しい証明については, [10, Chapter 1, 6] を参照してほしい．ここでは, 有限 CW 複体のガロア被覆の場合に限って, しかも短く証明できるところだけを説明する．**1** は, 有限群の場合の von Neumann トレースが, $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}G} = \frac{1}{\#G}\mathrm{tr}$ であることから従う．**2**, **6** は多少暇がいるので省略する．**3** は, 次のように考えればわかる．まず, L^2 チェインの代わりに L^2 コチェインを使えば, L^2 コホモロジーを導入できること, およびどちらを用いても L^2-Betti 数は変わらないことに注意する．0 次の L^2 コホモロジーが無限群の場合に消えることを言えばよい．G のケーリーグラフを考えると, この L^2 コホモロジーは $\ell^2 G$ の G 不変部分空間であるから, これは, $\{0\}$ である．また, ケーリーグラフが EG の 1-スケルトンであることと, $X \to EG$ なる G 同変な分類写像があることから, **2** を用いれば, X の 0 次 L^2-Betti 数が消えることがわかる．**4** は, もともとは多様体に関して, Atiyah による L^2 指数定理によって示されていたのだが, CW 複体に対して考えているので, 易しい．実際, 左辺のオイラー数は X/G のセルの数の交代和で, 右辺の L^2 オイラー数は X の G 同変セルの数の交代和であることが確認でき, これらは明らかに一致する．**5** も同様にできる．**7** は, $G < L$ が $\mathcal{N}G \subset \mathcal{N}L$ を誘導し, これが von Neumann トレースを保つことからわかる．**8** の証明は略すが, **7** が必要であることだけ注意しておく．**9** は, $\#(G/H)\,\mathrm{tr}_{\mathcal{N}G} = \mathrm{tr}_{\mathcal{N}H}$ に注意すればよい．

4.2 離散群の L^2-Betti 数

L^2-Betti 数が G ホモトピー不変であることと, EG が G ホモトピー不変を除いて一意に決まることから, $b_k^{(2)}(G) := b_k^{(2)}(EG; G)$ と定義することで, 離散群の L^2-Betti 数なる族が定義される．すなわち, 任意の離散群 G に対して, L^2-Betti 数なる族

$$\{b_k^{(2)}(G)\}_{k=0,1,\ldots} \in \prod_{k=0,1,\ldots} [0, \infty]$$

が定まる ([10, Chapter 6] を参照せよ)．これは以下のような性質を満たす．

1. 有限群
   G が有限群のとき, 次が成り立つ;

$$b_k^{(2)}(G) = \begin{cases} \frac{1}{\#G} & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

2. EG の d 次元スケルトン
   X を自由な右 G-CW 複体とする．これが $(d-1)$ 連結ならば次が成り立つ;

$$\begin{cases} b_k^{(2)}(X; G) = b_k^{(2)}(G) & (0 \leq k \leq d-1) \\ b_d^{(2)}(X; G) \geq b_d^{(2)}(G) \end{cases}$$

3. 0 次 L^2**-Betti 数**

$$b_0^{(2)}(G) = \begin{cases} \frac{1}{\#G} & (\#G < \infty) \\ 0 & (\#G = \infty) \end{cases}$$

4. オイラー数 $=$ L^2 オイラー数
   BG を有限 CW 複体として実現できるとき, 次が成り立つ;

$$\chi(BG) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k^{(2)}(G).$$

5. モース不等式
   BG を d 次元以下のセルの個数が有限個になるような CW 複体として実現できたとき, 次が成り立つ;
$$(-1)^d \sum_{0\le k\le d}(-1)^k\#(\text{k-cells of } BG) \ge (-1)^d \sum_{0\le k\le d}(-1)^k b_k^{(2)}(G);$$
6. ポアンカレ双対
   BG を n 次元閉多様体として実現できるとき, 次が成り立つ;
$$b_{n-k}^{(2)}(G) = b_k^{(2)}(G).$$
7. キュネスの公式
$$b_k^{(2)}(G\times H) = \sum_{i+j=k} b_j^{(2)}(G) b_j^{(2)}(H).$$
8. 指数有限部分群
   $H < G$ で $\#(G/H) < \infty$ とするとき, 次が成り立つ;
$$b_k^{(2)}(H) = \#(G/H) b_k^{(2)}(G).$$
9. **L^2-Betti 数の自明性遺伝**
   d 次以下の L^2-Betti 数が自明な群を正規部分群に持つ群の d 次以下の L^2-Betti 数は自明.
10. 測度同値での比例性原理
   H が G に測度同値ならば, k によらない正の定数 C が存在して, 次が成り立つ;
$$b_k^{(2)}(H) = C b_k^{(2)}(G).$$
11. **Coarse equivalence** での自明性保存
   BG を $(k+1)$ 次元セルが有限個しかないような CW 複体として実現できるとき, H が G に coarse equivalenct ならば, 次が成り立つ;
$$b_k^{(2)}(H) = 0 \Leftrightarrow b_k^{(2)}(G) = 0.$$

測度同値や Coarse equivalence という言葉については, この小文では説明しないが, 次節で少し補足するので, そちらを参照していただきたい. ここでも詳しい証明は, [10, Chapter 6, 7] を参照してもらうことにして, 簡単に証明できるところは説明しておこう. まず, **1** は, EG が可縮であることと 4.1 節の **1** より従う. **2** から **6** は 4.1 節の **2** から **6** より従う. また, **7** は, $E(G\times H) = EG\times EH$ であることと 4.1 節の **8** より従う. **8** は, EG への G の作用を H に制限すると, EG は H の分類空間 BH の普遍被覆 EH ともみなせることと 4.1 節の **9** より従う. **9** の証明はスペクトル系列を用いてなされる. **10** は Gaboriau による結果で, 証明は原論文に直接当たって欲しい ([4]). また, **11** は, BG が有限型 CW 複体として実現できる場合には, Pansu や Gersten によって知られていたものを筆者が一般化したものであり, 証明は [12] を見ていただきたい.

4.3 L^2-Betti 数の計算例

例として, 有限生成自由アーベル群, 有限生成自由群, 閉曲面の基本群などの L^2-Betti 数を計算してみよう. 結果は以下のようになる. 最後の例が実際に有用であることは後で述べる.

1. ランク 1 の自由アーベル群
$$b_k^{(2)}(\mathbb{Z}) = 0$$

2. ランク n の自由アーベル群
$$b_k^{(2)}(\mathbb{Z}^n) = 0$$

3. ランク n の自由群
$$b_k^{(2)}(\mathbb{F}^n) = \begin{cases} 0 & (k \neq 1) \\ n-1 & (k=1) \end{cases}$$

4. 種数 g の閉曲面の基本群
$$b_k^{(2)}(\pi_1(\Sigma_g)) = \begin{cases} 0 & (k \neq 1) \\ 2g-2 & (k=1) \end{cases}$$

5. 有用な例
$$b_k^{(2)}((\mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3) * \mathbb{F}^n) = \begin{cases} 0 & (k \neq 1,2) \\ n & (k=1) \\ 4 & (k=2) \end{cases}$$

証明. いずれも無限群だから, 0 次 L^2-Betti 数は 0 である. 分類空間の次元より大きい次数の L^2-Betti 数も 0 であることに注意する.

順に, 分類空間 BG とそのオイラー数を書いておこう.

1. S^1, $\chi(S^1) = 0$
2. $(S^1)^n$, $\chi((S^1)^n) = 0$
3. $\bigvee_n S^1$, $\chi(\bigvee_n S^1) = 1-n$
4. Σ_g, $\chi(\Sigma_g) = 2-2g$
5. $(\bigvee_3 S^1 \times \bigvee_3 S^1) \vee \bigvee_n S^1$, $\chi((\bigvee_3 S^1 \times \bigvee_3 S^1) \vee \bigvee_n S^1) = 4-n$

$b_1^{(2)}(\mathbb{Z}) = 0$ および $b_1^{(2)}(\mathbb{F}^n) = n-1$ は, オイラー数と L^2-オイラー数が等しいことから従う. $\mathbb{Z}$ の L^2-Betti 数が 0 だから, キュネスの公式によって $\mathbb{Z}^k$ の L^2-Betti 数が 0 になることがわかる.

$b_2^{(2)}(\pi_1(\Sigma_g)) = 0$ がポアンカレ双対によってわかる. よって, オイラー数と L^2-オイラー数が等しいことから $b_1^{(2)}(\pi_1(\Sigma_g)) = 2g-2$ が従う.

キュネスの公式により, $b_k^{(2)}(\mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3) = \begin{cases} 0 & (k \neq 1,2) \\ 0 & (k=1) \\ 4 & (k=2) \end{cases}$ であるが, $\mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3 < (\mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3) * \mathbb{F}^n$ によって誘導 CW 複体を考え, さらに分類空間の次元を勘定すれば, $b_2^{(2)}((\mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3) * \mathbb{F}^n) = b_2^{(2)}(\mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3)$ であることに気付く. よって, $b_2^{(2)}((\mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3) * \mathbb{F}^n) = 4$ となり, オイラー数と L^2-オイラー数が等しいことから $b_1^{(2)}((\mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3) * \mathbb{F}^n) = n$ も従う. □

唐突ではあるが, ここで幾何学的群論と測度論的群論について触れる. 前者は, 簡単に言ってしまえば, 離散群を Coarse equivalence なる粗い同値関係のもとで研究する離散群論であると言える (有限生成群しか考えないならば, Coarse equivalence の代わりに擬等長といっても良い). 後者であるが, これも簡単に言ってしまうと, 離散群を測度同値なる粗い同値関係のもとで研究する離散群論であると言える. これらについてはこれ以上説明しないが ([5], [6], [8] などを参照せよ), L^2-Betti 数に関連した事柄についてコメントしたい. 大きな定理の一つは, 4.2 節で述べた Gaboriau による定理で, L^2-Betti 数が測度同値のもとで比例性原理を満たすことである. これを用いると, 次の定理 (Cheeger-Gromov によって得られていた定理の Lück による一般化) に, 原論文の証明とは趣が異なるが, 意味がわかりやすい証明を与えることができるので紹介しておこう.

定理 4.1. 群 G が無限従順群 N を正規部分群に持てば, G の L^2-Betti 数は自明である. さらに, BG が有限 CW 複体として実現可能なとき, そのオイラー数は自明である.

証明. Ornstein-Weiss および Connes-Feldman-Weiss の結果から無限従順群は $\mathbb{Z}$ と測度同値であることが従うので, Gaboriau による測度同値での比例性原理と $\mathbb{Z}$ の L^2-Betti 数が自明であることから, 無限従順群の L^2-Betti 数も自明である. また, 無限従順群を正規部分群に持てば, L^2-Betti 数の自明性遺伝より, もとの群 G の L^2-Betti 数も自明である. □

この定理の証明中で触れたように, 無限従順群はすべて測度同値であるが, 一方で, 例えば $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}^2$ は Coarse equivalent でない. そこで, Coarse equivalenct だが, 測度同値でない例はあるか気になるのだが, 上記で計算した例 $G_n := (\mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3) * \mathbb{F}^n$ が答えてくれる. この例は他にも色々なことを教えてくれるので, それらを列挙しておく ([6, IV. B. 46]). 証明は, 4.2 節と 4.3 節に書いてあることを組み合わせるだけである. ただし, G_n の Coarse equivalence 類が $n \geq 2$ によらないことが確かめられることを注意しておく.

命題 4.2. n, m は互いに異なる 2 以上の自然数とする. 以下が成り立つ.

1. 群の分類空間のオイラー数が正または 0 または負であることは Coarse equivalence のもとで保たれない. 実際, $\chi(G_3) = 1$, $\chi(G_4) = 0$, $\chi(G_5) = -1$ である.
2. L^2-Betti 数は Coare equivalence のもとで比例性原理を持たない. 実際, G_n と G_m の 2 次 L^2-Betti 数は一致しているにもかかわらず, 1 次の L^2-Betti 数は相異なる.
3. Coarse equivalent だが測度同値でない例がある. 実際, G_n と G_m は測度同値でない.

二番目で述べたことが成り立つ一方で, 4.2 節の **11** が成り立つ.

参考文献

[1] 新井 朝雄, ヒルベルト空間と量子力学. 共立講座 21 世紀の数学 16, 共立出版, 東京, 1997.

[2] M. F. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974), pp. 43–72. Asterisque, No. 32-33, Soc. Math. France, Paris, 1976.

[3] B. Eckmann, Introduction to l_2-methods in topology: reduced l_2-homology, harmonic chains, l_2-Betti numbers. Notes prepared by Guido Mislin. Israel J. Math. 117 (2000), 183–219.

[4] D. Gaboriau, Invariants l^2 de relations d'e'quivalence et de groupes. (French) [l^2-invariants of equivalence relations and groups] Publ. Math. Inst. Hautes E'tudes Sci. No. 95 (2002), 93–150.

[5] M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups. Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[6] P. de la Harpe, Topics in geometric group theory. (English summary) Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[7] M. Kac, Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly 73 1966 no. 4, part II, 1–23.

[8] 木田 良才, 測度論的群論における剛性の研究. 数学, 日本数学会編集, 岩波書店, 掲載予定.

[9] W. Lück, L^2-invariants of regular coverings of compact manifolds and CW-complexes. Handbook of geometric topology, 735–817, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[10] W. Lück, L^2-invariants: theory and applications to geometry and K-theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 44. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[11] W. Lück, L^2-invariants from the algebraic point of view. Proceedings of the Symposium "Geometry and Cohomology in Group Theory", Durham, July 2003, editors: Bridson, M, Kropholler, P. H. and Leary, I. J., LMS Lecture Notes Series 358, 271–277, Cambridge University Press, 2009.

[12] S. Oguni, L^2-invariants of discrete groups under coarse equivalence and L^2-invariants of cocompact étale groupoids. preprint, 2010.

[13] P. Pansu, Introduction to L^2 Betti numbers. Riemannian geometry (Waterloo, ON, 1993), 53–86, Fields Inst. Monogr., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[14] J. Roe, Elliptic operators, topology and asymptotic methods. Second edition. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 395. Longman, Harlow, 1998.

[15] 砂田 利一, 基本群とラプラシアン: 幾何学における数論的方法. 紀伊國屋数学叢書; 29, 紀伊国屋書店, 東京, 1988.

[16] 浦川 肇, ラプラス作用素とネットワーク. 裳華房, 東京, 1996.