3次元多様体の4重対称カンドル不変量

野坂 武史 *

(京都大学 数理解析研究所 D2)

概要

二つの論文 [N2, HN] を概説する．まずプレプリント [N2] では，筆者は閉3次元多様体不変量を構成する条件を対称カンドルの枠組から公理化し，4重対称カンドルを導入した．それを使い，4重対称カンドルホモトピー不変量を定義した．まず4重対称カンドルを分類し，それらの成す圏は，群と対合中心元との組の成す圏と圏同値である事を示した．そして有限な4重対称カンドルにおける内部自己同型群を決定し，これからそのカンドルの多くの性質を取り出せた；例えば，2次カンドルホモロジー群や上記のホモトピー群の評価・計算を可能にする．また4重対称カンドルコサイクル不変量も導入し，とくに自明係数の場合を調べた．

さらに畠中英里氏 (東京農工大学) との共同研究であり続編論文 [HN] として上記の不変量にトポロジカルな解釈を与えた．閉3次元多様体の基本カンドルと基本類を定義し，この不変量を自然変換として再解釈する．群の向付ボルディズム群を通じて Dijkgraaf-Witten 不変量との関連を与えた．また Chern-Simons 不変量を単体分割なしで計算可能にする方式を得る事が出来た．系として，二面体カンドル R_m による絡み目 L のカンドルホモトピー不変量は，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ による或る2重分岐被覆の Dijkgraaf-Witten 不変量との等価性を示した．

このレポートは，論文 [N2, HN] の結果をお話としてまとめたものである．少々詳しく知りたい方には，１８頁のサーベイとして手軽にまとめた研究集会ＩＬＤＴの報告集 [HN2](数理研講究録) を見られたい．拙稿には，誤魔化しが多々あるが，それは目を瞑って読まれたし．

1 Introduction

我々の目的は「カンドルを使って3次元多様体不変量を構成し，研究すること」である．結果の大枠は上の概要に書いた通りである．この節では研究の動機付けについて2点述べたい．

まず**カンドル**とは，分配則を満たす或る代数系の事である．即ち，おおよそカンドルとは，群より弱い演算で，「等質空間」に入る二項演算のことである．カンドルは結び目 (埋込み $S^1 \hookrightarrow S^3$) との相性がよく，結び目の不変量を作る事が容易である．それは Fenn-Rourke-Sanderson [FRS1] によって定義された**カンドルホモトピー不変量**へ拡張されている．それは，カンドルの分類空間の2次ホモトピー群 $\pi_2(BX)$ に値を持つのであった[*1]．筆者は，その不変量を具体的に調べ，[N1] にまとめた．この不変量を3次元多様体にも適応したい．

２つ目の動機は，群 G における Dijkgraaf-Witten 不変量 [DW] (以下，DW 不変量と略記) というトポロジカルな不変量である．畠中英里氏 [H] は，(ある条件下で) DW 不変量をカンドルコサイクル不変量という結び目不変量の言葉で再構成された．本研究の目的の１つは，この条件を克服し，すべての群に対しその再構成を自然に完成させる事である．

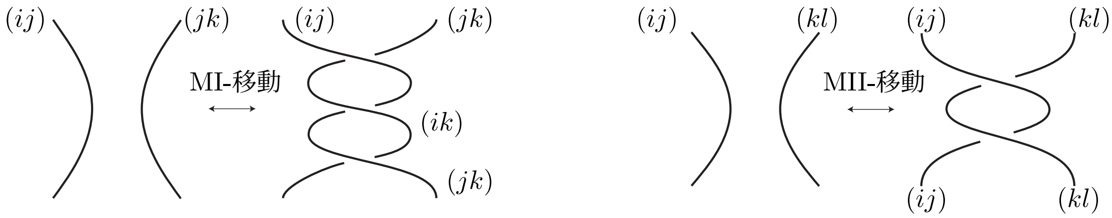
* email@adress: nosaka@kurims.kyoto-u.ac.jp

*1 (代数トポロジー向けの注記) 最近，Clauwens 氏 [Cla] がこの空間 BX の面白い性質を発見した．この基本群 $\pi_1(BX)$ は非可換で，よって BX に Hopf 空間構造は入らない．しかし，この普遍被覆空間 $\widetilde{BX}$ には，位相モノイドの構造が入る事がわかった．従って，$\widetilde{BX}$ はループ空間になる．この視点からの応用が期待される．当論文では，奇素数 p 位数の二面体カンドル X に関し，BX のコホモロジー $H^*(BX;\mathbb{F}_p)$ が (或る1次と“2次”)mod p コホモロジー作用素により Hopf 代数として自由生成される事を示している．

2 閉３次元多様体の不変量を構成するアイディア

アイディアは下の事実に基づいている．まず, 思い出す事に,「任意の閉３次元多様体 M は, 或る絡み目 (埋込み $L : \sqcup S^1 \hookrightarrow S^3$) の４重分岐被覆でかける」事が古典的に知られている．つまり M は, ある絡み目 L があって, その“ 単純*2 ”な準同型 $\phi : \pi_1(S^3 \setminus L) \to \mathfrak{S}_4$ によるモノドロミーで実現できる．さらに, 最近になって, Apostlakis[Apo] により, 次の一対一対応が示されている．MI, MII-移動は下図のような移動である．

$$\Big\{ \text{閉３次元多様体} \Big\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Big\{ \text{絡み目と単純な準同型 } \phi : \pi_1(S^3 \setminus L) \to \mathfrak{S}_4 \Big\} \,/\, \text{MI, II 移動}$$



この一対一対応に基づき, 今研究のアイディアを述べる：

「カンドルを使うと, テクニカルな単純性を外してさらにすっきりした一対一対応になる．３次元多様体の不変量を作るために, 単純なモノドロミーの上に, カンドルで付した情報を引き出せばよい．それには MI, MII-移動で不変となるカンドルを公理化すればよい．」

アイディア自体はナイーブなものであるが, 我々はこのアイディアだけで何処まで展開できるか試した．その結果, この研究で, いくつか興味深い現象や系も得る事が出来た.

3 定義: ４重対称カンドル と ホモトピー不変量

MI, MII-移動で不変となるカンドルを次のように定義した．それは鎌田聖一氏 [Kam] により導入された**対称カンドル**の定義に, MI, MII-移動で不変となる公理を附しただけである：ここで $\mathcal{S} := \{(ij) \in \mathfrak{S}_4\}$ とおく．($|\mathcal{S}|$=6 に注意)

定義 3.1. **４重対称カンドル**とは, 集合 X と二項演算 $* : X \times X \to X$ と写像 $\rho : X \to X$, と全射 $p_X : X \to \mathcal{S}$ との組で次を満たすものを言う．($X_{ij} := p_X^{-1}(ij)$ と書く)
$(Q1)$, $\forall x, y, z \in X$, $x * x = x$, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$,
$(Q2)$, $\rho \circ \rho = \mathrm{id}_X$, であり, $\forall x, y \in X$, $(x * y) * \rho(y) = x$, $\rho(x * y) = \rho(x) * y$,
$(Q3)$, $\forall x_{ij} \in X_{ij}$, $y_{jk} \in X_{jk}$, $z_{kl} \in X_{kl}$, $x_{ij} * y_{jk} = \rho(y_{jk}) * x_{ij}$, $x_{ij} * z_{kl} = x_{ij}$.

さらにこれを使い, ４重対称カンドルホモトピー不変量を構成した．これを粗く述べる．上の対応から, あるモノドロミー $\phi : \pi_1(S^3 \setminus L) \to \mathfrak{S}_4$ が, ある３次元多様体 M を実現するとする．すると, この結び目のモノドロミー D_ϕ に対し, X**-coloring** が定義される．それらの集合 $\mathrm{Col}_X(D_\phi)$ は, MI, MII-移動に不変である．またさらにアーベル群 $\Pi_{2,\rho}^{4\mathrm{f}}(X)$ を定義し, さらに自然な写像 $\Xi_X^{4\mathrm{f}}(D_\phi; \bullet) : \mathrm{Col}_X(D_\phi) \to \Pi_{2,\rho}^{4\mathrm{f}}(X)$ が構成した．これにより重みをのせ, **４重対称カンドルホモトピー不変量**を次で定義した.

$$\Xi_X^{4\mathrm{f}}(M) := \sum_{C \in \mathrm{Col}_X(D_\phi)} \Xi_X^{4\mathrm{f}}(D_\phi;\ C) \in \mathbb{Z}[\Pi_{2,\rho}^{4\mathrm{f}}(X)] \tag{3.1}$$

*2 単純とは, $\phi : \pi_1(S^3 \setminus L) \to \mathfrak{S}_4$ が推移的であり全射で, かつ, L の各メリディアンが互換 $\in \mathfrak{S}_4$ にいくものである.

これは MI, II 移動に不変である為, ３次元多様体の不変量となる事がわかる.

さて, 筆者はこのように不変量を定義したのはいいのだが, 公理的 (目的論的) に導入したため, 何を捉えた不変量なのかよく解らない. そこで次の問題達を応える必要があるだろう.

- ４重対称カンドルとは具体的に何か？ (§4)
- 他の不変量との関係はあるか？ (§6)
- 不変量の器である $\Pi_{2,\rho}^{4\mathrm{f}}(X)$ は, どれほど大きいか？ (§5)
- 不変量の器である $\Pi_{2,\rho}^{4\mathrm{f}}(X)$ は, 計算・評価できるか？ (§7)
- Ad hoc かつ公理的に定義された不変量から何か応用例はあるのか？ (§9,10)

以下, この 5 つの問いに答える. 上の ( ) は, それについて書かれている節を意味する.

4 ４重対称カンドルの分類

群 G と中心元 c で $c^2 = e$ を満たす組を **cored group**(芯付き群) と名づけた. Cored group (G, c) が与えられた時, $\widetilde{G}_c$ と書くカンドルを定義した. これは４重対称カンドルの定義を満たす. これはいわば, $\mathcal{S}$ 上の " 対合つき主 G-バンドル " と言える. 逆に, その例しかない事を示し, ４重対称カンドルを分類した. さらに圏の意味でも同値であることがわかった.

定理 4.1. ４重対称カンドル $(X, *, \rho, p_X)$ に対し, (G, c) が存在し, カンドル同型 $X \cong \widetilde{G}_c$ がある.

系 4.2. ４重対称カンドルの圏と, cored group (G, c) の圏は, 圏同値である. さらに４重対称カンドルの圏で $\rho = \mathrm{id}_X$ という制限した充満部分圏を考える. するとこの部分圏は, 群の圏と圏同値である.

この系は我々の哲学の限界を意味する. 即ち, 我々は MI, MII-移動不変性を公理化しただけなので新しいものを期待したのだが, cored group の圏で制限されてしまった事になる. しかし, ここは前向きに考えよう. この分類により我々は具体的な対象の基で議論が出来るようになったともいえる. 今後は具現化された４重対称カンドル $\widetilde{G}_c$ を扱おう.

ところでちなみに, この中心元 c が気になる存在である. 取り分け, 我々の不変量と多様体のスピン構造との関わりは, 興味深い問題である. 夢を言えば, カンドルを使いスピン構造を容易に捉えるスベを確立したい. DW 不変量の原論文 [DW] でスピン構造と対称性が論じられているので, これにも関連してほしい (付録参照).

４重対称カンドルの分類から, $\widetilde{G}_e$ の基本的性質が容易にわかった. これを付記しておく.

命題 4.3. $^\forall x, y \in \widetilde{G}_c$ に対し, $^\exists a, b \in G_c$ s.t. $(x * a) * b = y$. 特に $\widetilde{G}_c$ は連結なカンドルである.

命題 4.4. $\widetilde{G}_c$ は **type** 4 である. 即ち, $^\forall x, y \in \widetilde{G}_c$ に対し, $(((x * y) * y) * y) * y = x$. さらに $c = e$ の時に限り, $\widetilde{G}_c$ は type 2 である: $^\forall x, y \in \widetilde{G}_c$ に対し, $(x * y) * y = x$.

5 内部自己同型群

さて, 連結なカンドル X に対し, 内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(X)$ という群が定義できる. X のカンドル構造は $\mathrm{Inn}(X)$ の群構造により決定される事が知られている ([Joy]). 大雑把にいうとカン

ドルとは $\mathrm{Inn}(X)$ で割った等質空間と思えるからである．そこで有限な 4 重対称カンドル $\widetilde{G}_c$ に対し $\mathrm{Inn}(\widetilde{G}_c)$ を決定した．これで節 3 の第一の問いにほぼ解答を与えた.

定理 5.1. (G,c) を有限な cored group とする．群同型 $\mathrm{Inn}(\widetilde{G}_c) \cong I_{G,c}/Z_{G,c}$ がある, ただし,

$$I_{G,c} := \{(x,y,z,w;\sigma) \in G^4 \rtimes \mathfrak{S}_4 \mid c^{\frac{\mathrm{sgn}(\sigma)-1}{2}} xyzw \in [G,G]\ \},$$
$$Z_{G,c} := \{(z,z,z,z;e) \in G^4 \rtimes \mathfrak{S}_4 \mid z^4 \in [G,G]\ , z \in Z(G)\ \}. \tag{5.1}$$

カンドルの情報を握る内部自己同型群を決定した事により, 多くの系を導けた.

系 5.2. 有限 cored group (G,c) に対し, 不変量の容物である Abel 群 $\Pi_{2,\rho}^{4\mathrm{f}}(\widetilde{G}_c)$ は有限アーベル群である．さらに, もし $n \in \mathbb{Z}$ と $6|G|$ が互いに素であれば, $\Pi_{2,\rho}^{4\mathrm{f}}(\widetilde{G}_c) \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong 0$.

この系を得る為に以前の結果 [N1] を用いた．とにかく, 不変量の器は小さかった事になる．もっとも有限なカンドルから, 無限なものを取り出せるとは期待してはいなかったが・・.

ところで Eisermann[Eis2] によれば, $\mathrm{Inn}(X)$ の表示がわかれば, その 2 次の " カンドルホモロジー群 " $H_2^Q(X;\mathbb{Z})$ を計算可能に出来る．そこで彼の結果を使うと

系 5.3. 有限群 (G,c) に対し $H_2^Q(\widetilde{G}_c;\mathbb{Z})$ はアーベル化 $\mathrm{Ab}\big(T_{G,e}\big)$ と同型になる[*3]．ここで

$$T_{G,e} := \big\{(x,x,z,w;\sigma) \in G^4 \rtimes \mathfrak{S}_4 \mid x^2 zw \in [G,G],\ \sigma \in \{e,\ (12)(34)\}\big\}. \tag{5.2}$$

この系は実用的である．実際, 具体的な群 (巡回群, 完全群, 四元数群) に関して, そのカンドルホモロジー群を決定することが出来た.

6 $\widetilde{G}_c$-coloring $= \mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)$, Dijkgraaf-Witten 不変量へ

4 重対称カンドル $\widetilde{G}_c$ についてよく理解できたので, 次は不変量を調べていく．まず, (3.1) にある重みをとる前の不変量 $\mathrm{Col}_{\widetilde{G}_c}(D_\phi)$ について応える:

定理 6.1. Cored group (G,c) に対し, 全単射 $\mathrm{Col}_{\widetilde{G}_c}(D_\phi) \simeq G^3 \times \mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)$ がある.

これにより $\mathrm{Col}_{\widetilde{G}_c}(D_\phi)$ は既存の位相不変量である．中心元 c に因らない点も着目したい．未知な部分を追求していくには, 不変量 (3.1) で重みをとったアーベル群 $\Pi_{2,\rho}^{4\mathrm{f}}(\widetilde{G}_c)$ を調べていくしかなさそうである．それは次節に回そう.

その前にこの定理 6.1 に関して二つの応用例を見ていこう．第一に, 4 重対称カンドルホモトピー不変量を或る自然変換におきかえられた事を述べたい．このために先ず, 3 次元多様体 M に関して**基本カンドル** $SQ(M)$ を定義し, さらに**基本類** τ_M を定義した．そして米田の補題を使う事で次を得る事ができる.

系 6.2. カンドル同型 $SQ(M) \cong \widetilde{\pi_1(M) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{(e,1)}$ がある．さらに, 基本類 τ_M は, $\Xi^{4\mathrm{f}}_{SQ(M)}(D_\phi;\ \mathrm{id}_{SQ(M)}) \in \mathbb{Z}[\Pi_{2,\rho}^{4\mathrm{f}}(SQ(M))]$ として表せる.

[*3] この系は報告集 [HN2] では間違えて記述されています。申し訳ありません。

従って, 我々の不変量とは基本類を $\widetilde{G}_c$ で相対的に見たものとなる. 即ち, 自然変換でかける：

$$\Xi^{4\mathrm{f}}_{\widetilde{G}_c}(M) = \sum_{F \in \mathrm{Hom}_{4\mathrm{sQnd}}(SQ(M), \widetilde{G}_c)} F_*\big(\ \Xi^{4\mathrm{f}}_{SQ(M)}(D_\phi; \mathrm{id}_{SQ(M)})\big) \in \mathbb{Z}[\Pi^{4\mathrm{f}}_{2,\rho}(\widetilde{G}_c)]. \tag{6.1}$$

二つ目の応用例である定理 6.3 を述べる. まず DW 不変量を, 同境群を使って大雑把に復習しよう. まず, 有限な cored group (G, c) に対し, 有向同境群 $\Omega_3(G, c)$ が定義される. この群は, 閉３次元多様体と準同型の組 $(M, \pi_1(M) \to G)$ の全体を, “あるコボルダンス関係式”で割ったものとして定義された. すると DW 不変量は, 次で定義される:

$$DW_{G,c}(M) := \sum_{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)} [f : \pi_1(M) \to G] \in \mathbb{Z}[\Omega_3(G, c)]. \tag{6.2}$$

そこで, 上定理 6.1 により, $(\pi_1(M) \to G)$ を, カンドルの X-coloring の言葉で焼き直す. するとボルディズム群 $\Omega_3(G, c)$ と $\Pi^{4\mathrm{f}}_{2,\rho}(\widetilde{G}_c)$ の定義から次が解った：

定理 6.3. 全射 $\Pi^{4\mathrm{f}}_{2,\rho}(\widetilde{G}_c) \to \Omega_3(G, c)$ があり, これを通じ, DW 不変量は４重対称カンドルホモトピー不変量から導出される.

従って４重対称カンドルホモトピー不変量は DW 不変量より強いかまたは等しい事になる.

以前の畠中氏 [H] の論文では, 単体分割から接近し, 同様の導出を得ていた. 但し, この導出には G に条件が必要であった. が, 今回の進展はこの条件を外した事を強調したい. ポイントは, 単体分割からであると「局所向き不変」という抑制が課されるが, (超) 大域的な有向ボルディズム群を用いる事で自由を得たのである. この背景には, スローガン「単体分割の状態和から, 積分値の押し出しへ」という思想がある. 今回は, 境界なしの話なのでボルディズム群に自然に至った. 角や境界ありの場合は, この思想が DW 不変量の extended topological field theory の定式化に役立っている [Mor].

そうはいっても, カンドルというのは, 境界がトーラスの場合にしか相性がよくない. 切り貼りする (位相) 幾何をカンドルでも自然にしたいものである.

7　４重対称カンドルコサイクル不変量

さて次に, ４重対称カンドルホモトピー不変量を計算可能な枠にどう落したのかを述べたい.

実は４重対称カンドルホモトピー不変量は, 節 1 で述べたカンドル空間 (を割った空間) の２次ホモトピー群と関係し興味深い. しかし問題は２次ホモトピー群の計算がほぼ出来ない点にある. そこでその空間の局所系係数コホモロジーを使って**４重対称カンドルコサイクル不変量**を定義した. コサイクルが見つかれば計算できる不変量である. 注記すべきことで, この任意のコサイクル不変量は, 主題の４重対称カンドルホモトピー不変量から導出される.

$c = e$ のときはさらに興味深い. 実は, 今のべた空間の基本群が, 定理 5.1 の $I_{G,c}$) と同型である. だから基本群付 Hurewicz の定理を使えば, ２次ホモトピー群と局所系係数２次 (コ) ホモロジー群は同型になる. つまり原理的には, 我々の４重対称カンドルホモトピー不変量は, 或るコサイクルの４重対称カンドルコサイクル不変量でもって等価となる. つまり結論として, ４重対称カンドルホモトピー不変量の『化身』として計算可能な範疇に落とす事は出来た.

しかし, 良いコサイクルを具体的に見つけられず, 不変量の計算結果にまで至らなかった. そこで諦めずに, 計算できる４重対称カンドルコサイクル不変量を定式化することにし, 成功した. ２つの例があり, 次に述べたい.

8 自明係数の場合: ４重対称カンドルコサイクル不変量

１つ目の例を出そう．是節はマニアックなので飛ばされて構わない．結論は自明係数の場合はコサイクルがなくとも，４重対称カンドルコサイクル不変量を計算可能にした事である．

そのアイディアは Eisermann 氏に拠る [Eis1, Eis2]. それによると, カンドル X の自明係数２次ホモロジー群は, どうもカンドルの (非分岐) ガロア被覆やカンドル中心拡大に対応するようである [Eis2]. それも, type 2 というカンドルに関し, その「被覆変換群」は内部自己同型群から簡単に計算できるのである.

この視点から氏は, 結び目補空間の基本群と内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(X)$ のみを使って不変量を構成した．この不変量は **Coloring polynomial** と呼ばれている [Eis1]. その多項式は, 結び目の基本群の元である longtitude(緯線) を使って定義される．氏は自明係数の全ての“ カンドルコサイクル不変量 ”を導出する事を示している．従ってこの多項式の利点とは, コサイクルの表示がなくとも全てのカンドルコサイクル不変量が計算できるわけである

そこで筆者は, この構成に, ４重対称カンドル $\widetilde{G}_c$ がどれほど適応できるかを調べた．実際, Coloring polynomial と相性がよく, 自明係数の４重対称カンドルコサイクル不変量を, コサイクルなしで計算可能にした．ただしテクニカルな点で $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジー群のみのコサイクルから取り出せていない.

ただ注記する事は, このように計算できるようにしたのだが, 非自明な値をもつような多様体の例をまだ見つけるに至っていない．若し仮に, 非自明な値の例を見つける事が出来れば, 分岐する結び目の longtitude が多様体の不変量を捉える事になり, 稀有な現象であると (筆者は) 思える．もちろん, 自明な不変量かもしれない.

9 Chern-Simons 不変量の４重対称カンドルコサイクル不変量による再構成

二つ目の例は, Cheeger-Chern-Simons 類をカンドルコサイクルにより再構成した事である. これを使いタイトルにあるとおり不変量の再構成を得た.

背景として, Neumann によって, Chern-Simons 不変量を単体分割を使って定式化した事実に着目したい．この定式化は $PSL(2;\mathbb{C})$ の the extended Bloch 群 $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ を介する．$\widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ は, 三脚多様体 $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の或る被覆から生成される自由加群により定義される (see [Neu]). (離散) 群ホモロジー $H_3(PSL(2;\mathbb{C});\mathbb{Z})$ と $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ が同型となる事実は示唆に富む.

この点に着目し井上-蒲谷氏ら [IK] が, 結び目の補空間に関する Chern-Simons 不変量を, $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ を通じて, カンドルコサイクル不変量として再構成した．両氏はその際に, カンドルホモロジーと群ホモロジーとの関連を見つけている.

これらの影響を受け, 本研究では, 閉３次元多様体の, $SL(2;\mathbb{C})$ の Chern-Simons 不変量を扱った．$SL(2;\mathbb{C})$ の the more extended Bloch 群を使った (see [DG]). 我々の議論 (証明) では, $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ の原型の１つである Dupont [Dup] による $SL(2;\mathbb{R})$ の配置空間の議論に則っている.

定理 9.1. $\widehat{C}_2 \in H^3(SL(2;\mathbb{C});\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ を Chern-Simons 類とする．すると任意の $f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), SL(2;\mathbb{C}))$ に対して，６倍した Chern-Simons 不変量 $\langle 6[M], f^*(\widehat{C}_2)\rangle \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ [*4]をカンドルコサイクル不変量 (前論文 [H] の枠組みの基) として再構成した.

この定理の利点を述べたい．それは, 単体分割という煩瑣なものを使わずに，３次元多様体

[*4] $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ は divisible group なので，６倍した不変量からその６倍を還元する容易な方法がある.

の表示と $f \in \mathrm{Hom}\ (\pi_1(M), SL(2;\mathbb{C}))$ の組のみが与えられれば計算できるようになった点である．ただし, この再構成では Rogers dilogarithm が現れ計算が複雑であるが, 計算機に乗るような形式にはなっている．

10 応用例: カンドルホモトピー不変量と，2 重分岐被覆の DW 不変量

応用例として, [H2] の結果を拡張できた事を述べたい．

今回は 3 次元多様体の話であったが, [CJKLS] の結び目のカンドルの不変量をベースにしていた．この節では巡回群 $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の場合を考える．この場合はカンドルの形から, 我々の 4 重分岐被覆の話とカンドルホモトピー不変量が関わるのである．詳しい事は, 論文 [N1, FRS2] などにカンドルホモトピー不変量の定義などがある．

二面体カンドルをざっと述べよう．**二面体カンドル** R_m とは, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ にカンドル構造 $x * y = 2y - x$ と入れたものである．これに望月拓朗氏はこの “カンドルコホモロジー” に興味を持たれていた．氏は, m が奇数で, m が素数 p で割り切れる時, カンドル 3 次コホモロジー群 $H^3_Q(R_m; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を示し, その基底 (コサイクル) の記述に成功していた．これを用いた不変量もいくらか計算されていた [Moc].

さらにここで 4 重対称カンドル $\widetilde{G}_e$ を思い出すと, 定義からカンドル埋込み $R_m \hookrightarrow \widetilde{G}_e$ がある．カンドルホモトピー不変量とは, 或る群環 $\mathbb{Z}[\pi_2(BR_m)]$ に値を持つのであった．するとこの埋込みは, 準同型 $\pi_2(BR_m) \to \Pi^{4\mathrm{f}}_{2,\rho}(\widetilde{G}_e)$ を誘導する．すると我々の 4 重カンドルホモトピー不変量と関係をもつ．さらに定理 6.3 によるボルディズム群の関係を見る事で次を得た．

系 10.1. m を奇数とする．$L \subset S^3$ を絡み目とし, M_L を L で分岐する 2 重分岐空間とする．このとき, L のカンドルホモトピー不変量は, M_L の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の DW 不変量 (6.2) と等価である．

この同等の等価性は, m に付随する或る条件下で畠中氏 [H2] が示していたが, この条件を外す事が出来た．カンドルホモトピー不変量は組合せ的に定義されるが, この等価性により二面体カンドルに関し位相的意味を決定付けた事になる．

もっとも, 絡み目 $L \subset S^3$ のカンドルホモトピー不変量は, 計算できるものではない．しかし, 上記の望月氏のコサイクルを使う事で, 計算できる範囲に落とす事が出来る．

また他方で, 最近作成中 [N4] において, この論文の結果やアイディアを応用する事が出来た．今後コサイクルの不変量の研究に役立つと期待したい．

11 付録: [DW] の簡単な紹介

原論文 [DW] の簡単な紹介をする．[N2, HN] の結果は, 基本的にはこの論文の影響下にあることが見て取れる．簡単に内容をまとめると「Chern-Simons 汎関数の前量子的な経路積分 (経路は接続全体とする) は, (2+1)-TQFT[*5]を成す事が知られる．このセオリーの部分で位相幾何や differential character の議論でつかめる範囲を明確にした」という事である．筆者は物理に詳しい訳ではないので, 筆者の誤解があっても御海容下さい．少々長いが紹介に入る．

まず G をコンパクトリー群とする．BG を, 位相群 G から構成される分類空間とする．すると Eilenberg-MacLane 空間 $K(G;1)$ を離散位相群の分類空間とみる事で, 自然な入射 $K(G;1) \hookrightarrow BG$ が取れる．この homotopy fiber を考えよう:

$$F_G \longrightarrow K(G;1) \longrightarrow BG. \tag{11.1}$$

[*5] **(2+1)-TQFT** とは, strict tensor functor $Cob^2 \to Vec$ の事である．ここで, Cob^2 は向付閉 2 次元多様体を object とし, それを境界にする 3 次元多様体を morphism とする．一方, Vec はベクトル空間の圏である．

$\phi \in H^4(BG;\mathbb{Z})$ の元を取る (例えば, $G = SU(n)$ の時, Chern 類 c_2). もし $\mathbb{R}$-係数に拡大したものが $\phi_{\mathbb{R}} = 0 \in H^4(BG;\mathbb{R})$ と消える (例えば, 平坦接続のとき) ならば, 懸垂射 ι により送られた元 $\iota(\phi) \in H^4(F_G;\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ がある. 大雑把に言えば Cheeger-Chern-Simons 類とは, (11.1) において $\iota(\phi)$ をさらに押し出した $\widehat{\phi} \in H^3(K(G;1);\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の元であった. この ϕ や $\widehat{\phi}$ は, (enriched) Chern-Weil 理論により, 微分形式を通じた (滑らかな) 表示が可能である.

さて 3 次元多様体 M を固定し, Cheeger-Chern-Simons 類の汎関数 (作用) を考察している. まずは境界がない場合を考える. すると Chern-Simons 汎関数はゲージ不変 mod $\mathbb{Z}$ である. これは『TQFT に「逆元」を持たす』事になり, 『Cheeger-Chern-Simons 類は, 3 次元ボルディズム群の障害類である』と解釈される. これは位相幾何的な話で面白くない.

しかし多様体に境界があるとゲージ不変性が崩れる. この非不変性は境界の曲面上で Wess-Zumino 項の積分値として現れ, さらに TQFT を形成すると主張される. この (2+1)-TQFT は経路積分で記述からはっきりする. 要約すると, Wess-Zumino によるシグマモデルは, $H^4(BG;\mathbb{Z})$ からの懸垂射によるというのである.

ちなみに, $G = SU(2)$ とし, M がスピン構造をもつとする. このとき, Chern 類 c_2 は 2 で割れる*6. この理由は c_2 を取り出す際の Chern-Weil 理論で $\mathbb{Z}/2$-次数付 Weil 代数から構成されるから, 次元が 2 倍になってしまうからである*7. 従って, ここから Chern-Simons 項や Wess-Zumino 項を導出すれば, カイラリティを持つ代数上で共形場理論が展開される事になる.

さて [DW, 6 章] では G が有限群である場合が考察される. この場合, 定義から $BG = K(G;1)$ に注意する. これから上記の議論は色々と簡約化される. 即ち, 懸垂射は単なる普遍係数定理になり, 積分値は単体分割上のカップリングになり, 経路積分は $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ に簡約される. 但し (無限群にない問題で) カップリングにおいて「局所的向きの不変性」が要請されるが, [DW] では曖昧にされる (但し, これは本質的で [Neu] の仕事でも難所であった)

以上で, 紹介を終えるが最後に一言. 結び目や量子トポロジーにおいて, 摂動理論や量子場の理論や超ひも理論からの数理物理的影響を受けてきた. そしてこの影響下で今後も求心力を持って発展していく気配である. しかしながら, 論文 [DW] を見ると, 不変量を成立させるアイディアは, ゲージ群を有限群とした前量子的な Chern-Simons 理論から展開されているのである.

Acknowledgment とお詫び 城崎新人セミナーに運営委員として参加させて頂いた上, 貴重な交流の場を頂戴できたことを心から感謝を申し上げます. また運営委員の中心的役割を担って下さった委員長の三井さんをはじめ, 森さん, 森島さん, 田中さんに御礼申し上げます.

前回の報告集について, この場を借りて一点お詫び申し上げたいです. 前論稿 [野坂 09] では多少誤りがありました. 特に定理 12.3 の主張自体が間違えていました. 昨年夏にそれは訂正でき, 訂正版はプレプリント [N3] に御座います. 筆者の失態に, 御寛恕頂けると幸いです.

参考文献

[Apo] N. Apostolakis, *On 4-fold covering moves*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 117–145.

[Cla] F.J.-B.J. Clauwens, *The algebra of rack and quandle cohomology*, arXiv:math/10044223.

*6 これを正確に述べよう. M を境界にする W がスピン構造が伸びたとする. そのスピン構造を W 上のスピン c-構造とみなす. するとこれを Chern 類 $c_2(W)$ で代表させれば 2 倍で割れる事は良く知られている.

*7 今の視点で言えば, non-commutative Chern-Weil 代数に対応するであろうが・・

[CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.

[CS] S. S. Chern, J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. of Math. (2) **99** (1974) 48–69.

[DW] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), 393–429.

[Dup] J. L. Dupont, *The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles*, J. Pure and App. Algebra **44** (1987) 137–164.

[DG] J. L. Dupont and Goette, *The extended Bloch group and the Cheeger-Chern-Simons class.* Geom. Topol. **11** (2007), 1623–1635.

[Eis1] M. Eisermann, *Knot colouring polynomials*, Pacific Journal of Mathematics **231** (2007), 305–336.

[Eis2] ———, *Quandle coverings and their Galois correspondence*, arXiv:math/0612459.

[FR] R. Fenn, C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992) 343–406.

[FRS1] R. Fenn, C. Rourke, B. Sanderson, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structures **3** (1995) 321–356.

[FRS2] ———, *The rack space*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007) 701–740.

[H] E. Hatakenaka, *Invariants of 3-manifolds derived from covering presentations*, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[H2] ———, *On the Dijkgraaf-Witten invariant and the quandle cocycle invariant*, in preprint.

[HN] E. Hatakenaka and T. Nosaka, *A topological approach to 4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds*, in preperation.

[HN2] E. Hatakenaka and T. Nosaka, *A survey: 4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds*, to appear "Intelligence of Low Dimensional Topology" 2010, Eds. T.Ohtsuki. al., .

[IK] A. Inoue, Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, in preparation.

[Iwa] M. Iwakiri, *Quandle cocycle invariants of prentzel links*, Hirosima Math. J. **36** (2006) 353–363.

[Joy] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982) 37–65.

[Kam] S. Kamada, *Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants*, in "Intelligence of Low Dimensional Topology 2006, Eds. J. S. Carter et. al." 101-108. World Scientific Publishing Co.

[Moc] T. Mochizuki, *The third cohomology groups of dihedral quandles*, J. Knot Theory Ramifications, to appear.

[Mor] J. C. Morton, *exteneded TQFT, gauge theory, and 2-linearization*, arXiv:10035603v1.

[Neu] W. D. Neumann, *Extended Bloch group and the Cheeger-Chern-Simons class*, Geom. Topol. **8** (2004), 413–474 (electronic).

[N1] T. Nosaka, *On homotopy groups of quandle spaces and the quandle homotopy invariant of links*, preprint.

[N2] ———, *4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds*, preprint, RIMS-1701, 2010.

[N3] ———, *On quandle homology groups of Alexander quandles of prime order*, preprint, RIMS-1680, 2009.

[N4] ———, *Some notes on quandle homotopy invariants of Alexander quanldes of finite fields*, in preperation.

[野坂 09] ———, **Quandle 空間を使った Quandle homotopy 不変量と奇素数位数 Quandle の Quandle homology の決定**, 第６回城崎新人セミナー報告集.